



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
Nukleáris Technikai Intézet

Válogatott fejezetek a magfizikából

Egyetemi jegyzet

Készítette: Kis Dániel Péter

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1	Radioaktív bomlások.....	4
1.1.	A Fermi-féle aranyszabály	4
1.2.	Az időrendezett szorzat és az S-mátrix	8
1.3.	A γ -bomlás és a Fermi aranyszabály	11
1.4.	Az α -bomlás és az aranyszabály	45
1.5.	A β -bomlás	57
2	Magerők	69
2.1.	Általános áttekintés, tulajdonságok	69
2.2.	Yukawa-elmélet	70
3	A csillagok fizikája.....	80
3.1.	Empirikus megállapítások, Hertzsprung-Russell diagram (HRD).....	80
3.2.	A csillagok energiatermelése, fontosabb magreakciók	84
3.3.	Csillagfejlődés és szupernóva-robbanás.....	91
3.4.	A neutroncsillag	106

Előszó

Ez a jegyzet a BME fizika MSc és fizika PhD hallgatóinak készült a *Válogatott fejezetek a magfizikából* című előadás segédanyagaként. De minden elméleti fizika és magfizika iránt érdeklődő fizikus hallgató számára hasznos olvasmány lehet.

A jegyzetben tárgyaljuk a perturbációszámítás elsőrendű közelítését alkalmazó Fermi-aranyszabályt, amely a bomlások elméleti leírásának egy módszere, valamint megalapozzuk a kovariáns perturbációszámítást és bevezetjük az S-mátrix formalizmust az időrendezett szorzaton keresztül. Az elméleti bevezetés után részletesen tárgyaljuk a gamma-bomlást, valamint az alfa-bomlást. A jegyzetben szó esik a béta-bomlásról is, azonban meg kell jegyeznünk, hogy ennek konzisztens leírására nem alkalmas a Fermi-aranyszabály, ehhez kvantum-térelméleti módszerek szükségesek. A következő nagy téma a magerő Yukawa-elmélete. Ebben a szakaszban a kölcsönhatás részecskéjét skalártérrel írjuk le, majd a perturbáció számítás első rendjében (egy-pion csere) meghatározzuk az így kialakuló potenciált. Az utolsó szakaszban a csillagokban lezajló alapvető folyamatokat mutatjuk be: energiatermelés, stabilitás, termodinamikai jellemzők stb. A fejezet végén a csillagok egy lehetséges végállapotát a neutroncsillagot jellemzzük.

1 Radioaktív bomlások

1.1. A Fermi-féle arany szabály

A kölcsönhatások és reakciók egyszerű, kvantummechanikai tárgyalása a Fermi-féle arany szabályon keresztül valósítható meg. Mivel a fejezet további pontjaiban erősen támaszkodunk erre a szabályra, ezért fontos, hogy pontosan megértsük annak jelentését. Az általánosság kedvéért vegyünk egy kölcsönható kvantummechanikai rendszert, amely időfejlődését az időfüggő Schrödinger-egyenlet írja le:

$$\mathbf{H} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi,$$

ahol $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, \mathbf{H}_0 a perturbálatlan, szabad rendszer Hamilton-operátora, míg \mathbf{H}' az időfüggő perturbációt leíró tag. A \mathbf{H}_0 operátor sajátértékeire és sajátfüggvényeire teljesüljenek a következő összefüggések:

$$H_0 \psi_n = \hbar \omega_n \psi_n \quad \text{és} \quad \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}.$$

Amikor egy kvantummechanikai folyamatot vizsgálunk arra kérdésre keressük a választ, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a rendszer egy adott Ψ_i kezdeti állapotból egy Ψ_f végállapotba kerül. Ezt az átmeneti valószínűséget szimbolikusan a következő mátrixelem adja meg:

$$P_{i \rightarrow f} = \langle \Psi_f | \mathbf{H} | \Psi_i \rangle.$$

Ahhoz, hogy az átmeneti valószínűségről többet mondhassunk, fejtsük ki a perturbált rendszer állapotait a szabad Hamilton-operátor sajátfüggvényeinek teljes rendszerével:

$$\Psi = \sum_n c_n(t) \psi_n e^{-i\omega_n t},$$

ahol c_n kifejtési együttható, amely valószínűségi jelentést hordoz, hogy ezt szemléltessük, nézzük meg egy adott állapot valószínűségét:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n,m} c_n^*(t) c_m(t) e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \sum_{n,m} c_n^*(t) c_m(t) e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \delta_{mn} = \sum_n c_n^*(t) c_n(t).$$

Látható, hogy a perturbált rendszer lehetséges állapotait, ill. az átmeneteket a kifejtési együtthatók határozzák meg. Ezen együtthatók időfejlődésére kapunk egy egyenletet, ha a szabad Hamilton operátor sajátfüggvényeivel kifejtett állapotokat visszairjuk a Schrödinger-egyenletbe:

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial c_n}{\partial t} \psi_n e^{-i\omega_n t} = \sum_n c_n \mathbf{H}' \psi_n e^{-i\omega_n t}.$$

Ha a fenti egyenletet megszorozzuk $\psi_k^* e^{i\omega_k t}$ -vel és integráljuk a teljes térre, a következőt kapjuk:

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial c_n}{\partial t} e^{-i(\omega_n - \omega_k)t} \delta_{nk} = \sum_n c_n \langle \psi_k | \mathbf{H}' | \psi_n \rangle e^{-i(\omega_n - \omega_k)t},$$

majd némi átalakítás után a rendezett egyenlet

$$i\hbar \frac{\partial c_k}{\partial t} = \sum_n c_n M_{kn} e^{-i(\omega_n - \omega_k)t},$$

ahol $M_{kn} = \langle \psi_k | \mathbf{H}' | \psi_n \rangle$ átmeneti mátrixelem a szabad Hamilton-operátor adott sajátállapotai között. Vegyük észre, hogy a fent megfogalmazott kifejtési együtthatókra vonatkozó egyenlet a Schrödinger-egyenlettel ekvivalens leírása a perturbált rendszer időfejlődésének. Vizsgáljuk meg a fenti egyenlet közelítő megoldásait a perturbációszámítás p rendjében. A közelítés $(p+1)$ rendjében a megoldás előáll, mint

$$i\hbar \frac{\partial c_k^{(p+1)}}{\partial t} \approx \sum_n c_n^{(p)} M_{kn} e^{-i(\omega_n - \omega_k)t},$$

azzal a feltétellel, hogy a nullad rendű kifejtés együttható $\frac{dc_k^{(0)}}{dt} = 0$, mely annyit jelent, hogy ebben a rendben nincs átmenet, konstans a kifejtési együttható. Első közelítést vizsgálva legyen a perturbáció $t < 0$ -re kikapcsolva, valamint az állapotra vonatkozó kezdeti feltétel (kétállapotú rendszer):

$$c_n^{(0)}(t)|_{t=0} = \delta_{mn},$$

$$\mathbf{H}' = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \mathbf{H}_1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Integráljuk a fenti egyenlet mindkét oldalát idő szerint:

$$i\hbar c_k^{(1)}(t) = \int_0^t M_{km} e^{i\omega_{km}t'} dt',$$

A bal oldalon a $c_k(0)$, valamint a jobb oldalon az állapotra való összegzés azért nem jelenik meg, mert kezdetben a rendszer „m” állapotban volt és a végén „k” állapotba jutott (lehetséges végállapotot száma most egy!, valamint a továbbiakban a rend indexet elhagyjuk). A kérdéses integrál könnyen kiszámítható, így az adott végállapot időfejlődése:

$$c_k(t) = \frac{1}{\hbar} M_{km} \frac{1 - e^{i\omega_{km}t}}{\omega_{km}} = 2iM_{km} \frac{\sin\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{\hbar\omega_{km}} e^{i\frac{\omega_{km}t}{2}},$$

az eredmény fenti átalakításához kihasználtuk, hogy

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

A fentiek alapján már tetszőleges időpontba megadhatjuk annak a valószínűségét, hogy a rendszer a kezdeti „m” állapotból a „k” állapotba kerüljön:

$$P_k(t) = |c_k(t)|^2 = \frac{4|M_{km}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{\hbar^2 \omega_{km}^2}.$$

Ahhoz, hogy a kapott eredményt értelmezhessük, kell egy formális átalakítást tennünk: osszuk el a nevezőt t -el, ekkor az időegységre eső átmeneti valószínűséget kapjuk

$$w = \frac{P_k(t)}{t} = \frac{4|M_{km}|^2 \sin^2\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{\hbar^2 \omega_{km}^2} \frac{1}{t} = \frac{4|M_{km}|^2}{\hbar^2} g(\omega_{km}, t).$$

A kapott eredmény jelentése a következő: w megadja annak az időegységre vonatkoztatott valószínűségét, hogy az adott $[0, t]$ intervallumban megvalósul-e a kérdéses állapot. A kérdéses valószínűség a mátrixelemtől eltekintve a g függvényen keresztül az ω_{km} és a t függvénye. Vegyük észre, hogy a g t -től függetlenül maximális értéket vesz fel, ha $\omega_{km} = 0$, ez azaz eset, mikor a kezdeti és végállapot energiája megegyezik, így az energia-megmaradás egzaktul teljesül, az átmenet nem tiltott. Abban az esetben mikor $\omega_{km} \neq 0$, akkor is létezik olyan t érték melyre $g(\omega, t) > 0$, azaz az energia-megmaradás sérülése mellett is véges ideig létezhet a kérdéses állapot! A g függvény karakterisztikájából következi, hogy ω_{km} növekedése mellett csökken az a t intervallum, melyben $g(\omega, t) > 0$. Ez a tulajdonság nem más, mint az energia-idő-re vonatkozó Heisenberg-féle határozatlansági reláció megnyilvánulása!

Felmerül a kérdés, hogy milyen állapot lehet a teljes időintervallumra stabil? Ezt adja meg az átmeneti valószínűség $t \rightarrow \pm\infty$ határeset, mely a w -re vonatkozólag a következőt jelenti:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w = \frac{4|M_{km}|^2}{\hbar^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{\omega_{km}^2 t} = \frac{4|M_{km}|^2}{\hbar^2} \frac{\pi}{2} \delta(\omega_{km}),$$

ahol megjelent egy függvény határértékeként a Dirac-delta, amely nem tartalmaz mást, mint az energia-megmaradást:

$$\delta(\omega_{km}) = \hbar \delta(\hbar \omega_{km}) = \hbar \delta(E_k - E_m),^1$$

azaz stabil (végtelen idő intervallumra vonatkozó) átmenet csak akkor valósulhat meg, ha a kezdeti és a végállapot energiája megegyezik. A fentiek alapján felírható az átmeneti valószínűség, amelyet Fermi aranyszabálynak neveznek:

$$w_k = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{km}|^2 \delta(E_k - E_m).$$

Az aranyszabály abban az esetben is megfogalmazható, ha a lehetséges végállapotok száma nem egy. Vezessük be a $\rho(k)$ állapotosűrűséget, ekkor az $(E_k, E_k + dE_k)$ intervallumban lévő állapotok száma

$$dn = \rho(k) dE_k,$$

az időegységre eső teljes átmeneti valószínűséget úgy kapjuk, hogy az adott intervallumba eső összes lehetséges végállapotra összegezzük a parciális átmeneteket:

$$W_k = \frac{1}{t} \sum_{k' \approx k} P_{k'}(t).$$

Ezzel titkon azzal a közelítéssel élünk, hogy a több végállapotú esetben a teljes átmeneti valószínűséget úgy tekintjük, mint különböző kétállapotú átmenetek összességét.

Az állapottér kontinuum határesetében az állapotokra vett összeg integrállá írható:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{t} \int P_{k'}(t) dn = \frac{1}{t} \int P_{k'}(t) \rho(k) dE_k = \int \rho(k) \frac{4|M_{km}|^2}{t} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{\omega_{km}^2} \frac{dE_k}{\hbar^2} = \\ &= \rho(k) \frac{4|M_{km}|^2}{\hbar} \int \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{km}t}{2}\right)}{t\omega_{km}^2} d\omega_{km}, \end{aligned}$$

a kapott integrál könnyen kiszámítható, így a teljes átmenetet megadó Fermi aranyszabály:

$$W_k = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{km}|^2 \rho(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{km}|^2 \frac{dn}{dE_k}.$$

¹ Ez az összefüggés könnyen belátható, ha vesszük a következő átskálázott Dirac-delta disztribúciót:

$$\int \delta(ax) dx = \int \delta(y) \frac{1}{a} dy \Rightarrow \delta(ax) = \delta(y) \frac{1}{a}.$$

1.2. Az időrendezett szorzat és az S-mátrix

A gyengén kölcsönható rendszerek kölcsönhatásainak leírása az előző alfejezetben tárgyalt perturbációs számítással lehetséges. Azonban a Fermi-aranyszabályon bemutatott egyszerű közelítés nem-relativisztikus leírása a szórási folyamatoknak, amely így szükségszerűen nem tartalmazza explicit a relativisztikus invariancia feltételeit. Éppen ezért szükség van egy konzisztens, relativisztikus (kovariáns) perturbációs számítás kidolgozására. Ezen elmélet tárgyalása szervesen kötődik a Fermi-elmélet kapcsán bevezetett formalizmushoz, ezért ebben a fejezetben mutatjuk be a módszer alapjait, természetesen a teljesség igénye nélkül szigorúan az általánosság elvét szem előtt tartva. Tekintsük a kifejtési együtthatókra vonatkozó, már levezetett általános egyenletet:

$$i\hbar \frac{\partial c_k}{\partial t} = \sum_n c_n M_{kn} e^{-i(\omega_n - \omega_k)t},$$

ahol M_{kn} a \mathbf{H}' kölcsönhatási operátor időfüggetlen mátrixeleme (Schrödinger-kép). Ebből képezhetünk egy explicit időfüggő mátrixelemet is, definíció szerint

$$M_{kn}(t) = M_{kn} e^{-i(\omega_n - \omega_k)t},$$

amely az időtől függő Hamilton-operátor mátrixelemeként tekinthető $\langle \psi_k | H'(t) | \psi_n \rangle$, ahol

$$H'(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H' e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}.$$

Vegyük észre, hogy a definiált időfüggő operátor nem azonos a Heisenberg-képbeli alakkal, mivel az időfejlésben nem a teljes \mathbf{H} Hamilton-operátor szerepel, hanem csak a \mathbf{H}_0 szabad rendszert leíró operátor. Ezt a leírási módot praktikusán *kölcsönhatási képnek* nevezzük. Egy állapot időfejlődése a kölcsönhatási képben az elmondottak alapján a következő általános egyenlettel fejezhető ki:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H'(t) \Psi(t),$$

az állapotok és operátorok helyfüggését most az egyszerűség kedvéért elhagyjuk. A kapott egyenlet szerkezetéből következik, hogy az állapot időfejlődését csak és kizárólag a perturbáció határozza meg, amint ezt fizikailag el is várjuk. Azonban az egyenlet megoldása úgyis, mint a kiindulási egyenleté egzaktul nem lehetséges, ezért a megoldáshoz valamilyen közelítő eljárást kell találnunk.

Vizsgáljuk meg egy adott t időpillanattól infinitezimálisan közeli $t + \delta t$ időpillanatban a perturbáció hatására megváltozó rendszer állapotát, ehhez a végesdifferencia közelítést kell alkalmaznunk:

$$i\hbar [\Psi(t + \delta t) - \Psi(t)] = \delta t H'(t) \Psi(t),$$

amelyet az argumentumok szerint rendezés után a következő formába írhatjuk

$$\Psi(t + \delta t) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \delta t H'(t) \right] \Psi(t) \approx e^{-i \frac{\delta t}{\hbar} H'(t)} \Psi(t).$$

Ennek analógiájára formálisan meghatározhatjuk $\Psi(t)$ egy tetszőleges t_f időpontbeli értékét egy adott t_i pillanatbeli kezdeti értékéből, ehhez a $[t_i, t_f]$ intervallumot fel kell osztanunk infinitezimális δt_n intervallumokra, úgy hogy $t_{n+1} - t_n = \delta t_n$, majd ezen intervallumokra alkalmazzuk a kapott közelítést, így végeredményben a következőt kaphatjuk:

$$\Psi(t_f) = \prod_{n=i}^f \left(e^{-i \frac{\delta t_n}{\hbar} H'(t_n)} \right) \Psi(t_i).$$

Érdeemes kicsit elgondolkodni ezen az eredményen. Az összefüggés egy operátorfüggvényekből álló produktumból áll, mely annál pontosabb eredményt ad, minél kisebb a δt_n intervallumok nagysága, más szavakkal minél több tagból áll a szorzat. Ekkor felmerülhet bennünk az igény arra vonatkozólag, hogy exponenciális azonosságot alkalmazva a produktumot átalakítsuk az exponensben való összegzésre. Ezzel a lépéssel az összegzés végtelen kis elemű határesetben integrállá alakítható, így kompakt képlet adódik a hullámfüggvényre. Ez a lépés azonban nem triviális, mivel az exponensben nem függvények, hanem operátorok szerepelnek. Hogy ezt pontosabban megvilágítsuk tekintsünk egy kételemű produktumot és alkalmazzuk az ismert exponenciális azonosságot

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

ahol A és B operátorok. Az összefüggésből látszik, hogy a függvényeknél megszokott szorzat-összegzés átalakítás csak akkor teljesülhet operátorok esetében, ha azok kommutálnak egymással. Az általunk kapott kifejezésben pl. $H'(t_1)$ és $H'(t_2)$ szerepel, melyek viszont nem felcserélhetőek (legalább is időszerű pontokban nem), így a produktumból határértékben nem kaphatunk integrált az exponensben. Ezt a problémát azonban megkerülhetjük. Ehhez nem kell mást tennünk, mint bevezetni az ún. időrendezett szorzatot. Szimbolikusan végezzük el az integrállá alakítást:

$$\Psi(t_f) = T \exp \left[-i \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H'(t) dt \right] \Psi(t_i),$$

ahol a T az időrendező operátor, amely meghatározott sorrendbe állítja a $H'(t_n)$ operátorokat a produktumban (így közvetve az integrálban is). Ennek szemléltetéséhez vizsgáljuk meg az a speciális esetet, amikor $t_i = -\infty$ és $t_f = \infty$, ekkor az állapotok között a

$$\Psi(\infty) = T \exp \left[-i \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H'(t) dt \right] \Psi(-\infty) = S \Psi(-\infty),$$

ahol S a szórási-operátor. A formális időrendezett alakban felírt S mátrixok sorfejtéssel kaphatjuk meg:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k! \hbar^k} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_k T \{ H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k) \}.$$

A formális felírásban a k -ad rendű tag k -szoros integrálként jelenik meg, mely a perturbációszámítás rendjének feleltethető meg. Az operátorok konkrét időrendezett alakja azt jelenti, hogy a t_1, t_2, \dots, t_k értékek jobbról balra haladva növekednek. Ezzel a kötött sorrenddel biztosított, hogy az exponenciálisok produktuma az argumentumok összegévé (integráljává) alakítható, anélkül, hogy az operátorok felcserélhetőek lennének (mivel ebben az esetben kötött az operátorok sorrendje).

Az S -mátrixra kapott sorfejtett képlet egyenlőre explicit nem tartalmazza a Lorentz-invarianciát, ahhoz hogy ezt mégis láthatóvá tegyük némi átalakítást kell eszközölnünk. Először is a kölcsönhatási Hamilton-operátor helyett a relativisztikus kvantumelméletben szokásos lokális Hamilton-sűrűséget írjuk, azaz

$$H'(t) = \int \mathcal{H}(x) d^3x.$$

Ezzel a helyettesítéssel a következőt kapjuk:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k! \hbar^k} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_k T \{ \mathcal{H}'(x_1) \mathcal{H}'(x_2) \dots \mathcal{H}'(x_k) \},$$

ahol a d^4x négyes térfogatelem és a T időrendező operátor Lorentz-invariánsak, a H' kölcsönhatási Hamilton-sűrűségek pedig relativisztikus elméletben szükségszerűen teljesítik az invarianciát (lévén, hogy skalár mennyiségek, pl. az elektromágneses kölcsönhatása op. $j_\mu(x)A^\mu(x)$).

A kapott képletből még egy fontos tulajdonság következik az S -mátrixra vonatkozólag, ez pedig nem más, mint az unitaritás. Ennek belátására térjünk vissza az S -mátrix exponenciális alakjához:

$$S = T \exp \left[-i \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}'(x) d^4x \right] = T \prod_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(-i \frac{\delta t_n}{\hbar} \int d^3x_n \mathcal{H}'(x_n) \right),$$

majd képezzük az adjungált mátrixok

$$S^* = T^* \prod_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(i \frac{\delta t_n}{\hbar} \int d^3x_n (\mathcal{H}')^*(x_n) \right) = T^* \prod_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(i \frac{\delta t_n}{\hbar} \int d^3x_n \mathcal{H}(x_n) \right),$$

ahol kihasználtuk, hogy a Hamilton-operátor hermitikus, a T^* szimbolikusan azt jelenti, hogy az időrendezés sorrendjét fel kell cserélni. Ennek következtében az SS^* szorzat tagjai a felcserélt időrendezés miatt páronként kiejtik egymást

$$SS^* = \exp \left(-i \frac{\delta t_1}{\hbar} \int d^3x_1 \mathcal{H}(x_1) \right) \dots \exp \left(-i \frac{\delta t_n}{\hbar} \int d^3x_n \mathcal{H}(x_n) \right) \exp \left(i \frac{\delta t_n}{\hbar} \int d^3x_n \mathcal{H}(x_n) \right) \dots \\ \dots \exp \left(i \frac{\delta t_1}{\hbar} \int d^3x_1 \mathcal{H}(x_1) \right) = 1$$

Az unitaritási tulajdonság ezen gondolatmenet alapján annak a következménye, hogy a Hamilton-operátor hermitikus. Azonban meg kell jegyeznünk, hogy az S-mátrix unitaritása sokkal általánosabb tulajdonság, amely független az állapotfüggvények ill. operátorok tulajdonságaitól.

1.3. A γ -bomlás és a Fermi arany szabály

A γ -bomlás természetéből fakadóan elektromágneses kölcsönhatás, ezért a pontos, modern leírása térelmélettel történik (relativisztikus QED). Viszont bizonyos feltételek mellett szemiklasszikus leírás is lehetséges, amelyet még Fermi dolgozott ki 1950 körül. A számítások a Fermi arany szabályon alapulnak, ahol azt a közelítést engedjük meg, hogy lehetséges végállapotok sűrűségét $\rho(k) = \frac{dn}{dE_k}$, valamint az elektromágneses teret klasszikusan határozzuk meg. Az alkalmazandó Fermi arany szabály:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \mathbf{H}_1 | i \rangle|^2 \rho(k).$$

Az „i” kezdeti állapotban nincs foton, hanem csak a mag állapotfüggvénye van jelen, amelyet a következő alakba írjuk fel:

$$\Psi_i = \psi_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t},$$

ahol ψ_a a mag állapotfüggvénye. A végállapot már összetett állapot, hiszen az új állapotba került mag mellett megjelenik egy foton is:

$$\Psi_f = \psi_b e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t} \cdot \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{V}} e^{\pm i(kr - \omega t)},$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}$ a foton polarizációs vektora. Látható, hogy a fotont elektromágneses síkhullámként adjuk meg. Ezen hullámfüggvényekkel a keresett átmeneti mátrixelem a következő:

$$M_{fi} = \langle f | \mathbf{H}_1 | i \rangle = \int \psi_b^* e^{-i k r} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_b \pm \hbar \omega - E_a)t} \mathbf{O} \psi_a d^3 r,$$

ahol az \mathbf{O} operátor a kölcsönhatást leíró perturbáció operátora. Az eddigi gondolatmenet alapján ahhoz, hogy a foton kibocsátással járó bomlást (azaz az anyag és elektromágneses tér kölcsönhatását) kváziklasszikusan közelítsük, szükségünk van a kölcsönhatási operátorra és a végállapotok sűrűségére. Első lépésben határozzuk meg a kölcsönhatási operátort.

A leíráshoz az egyszerűség és érthetőség kedvéért használjuk a klasszikus mechanikából ismert hamiltoni formalizmust. Egy szabad töltésre vonatkozó stacionárius Schrödinger-egyenlet a következő:

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E \right) \varphi = 0,$$

ahol \mathbf{p} a szabad részecske impulzus operátora

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla.$$

A hamiltoni formalizmusban ez a kanonikus impulzusnak felel meg, amely szabad rendszerre azonos a kinetikus impulzussal. Ha bekapcsoljuk a sugárzási teret ($\mathbf{A} \neq 0$ és $\Phi \neq 0$), akkor az kölcsönhatásba lép a töltéssel, amely a mechanikából ismert módon megváltoztatja a kanonikus impulzust, valamint a potenciált:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} + \frac{\partial V(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \\ E &\rightarrow E + V = E + e\Phi, \end{aligned}$$

Ahol e az elektromos töltés, \mathbf{p} a kanonikus impulzusnak megfelelő operátor, \mathbf{A} operátor értékű vektorpotenciál, Φ a skalárpotenciál. Célszerű, hogy olyan speciális esetet vizsgáljunk, amikor $\Phi = 0$ (ez a választás egyszerű U(1) mértéktranszformációval is megvalósítható). Ekkor a Schrödinger-egyenlet:

$$\mathbf{H}\varphi = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \varphi = E\varphi.$$

A Hamilton-operátort kifejtve megkapjuk a keresett kölcsönhatási tagot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e \frac{\mathbf{A}\mathbf{p}}{mc} - \frac{[\mathbf{p}, \mathbf{A}]}{2mc} + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2mc^2} \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e \frac{\mathbf{A}\mathbf{p}}{mc}, \\ &\text{ha } [\mathbf{p}, \mathbf{A}] = 0, \end{aligned}$$

ahol feltételezzük, hogy a perturbáció másodrendben elhagyható és, hogy a kommutátor eltűnése miatt az impulzus és a vektorpotenciál egymástól függetlenek, amely egy nagyon erős kritérium. Viszont így leolvashatjuk a kölcsönhatási operátort:

$$\mathbf{H}_I = e \frac{\mathbf{A}\mathbf{p}}{mc}.$$

Látszik, hogy a kifejezés egy kommutáló operátorszorzatot tartalmaz, ahol az impulzus jól definiált, viszont a vektorpotenciál nem ismert. Ahhoz, hogy megadhassuk az utóbbi operátort vissza kell térnünk a klasszikus képre, ahol a vektorpotenciál a Maxwell-egyenletek értelmében síkhullámokként állítható elő:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_0}{\sqrt{2}} e^{\pm i(kr - \omega t)},$$

ahol A_0 egyenlőre határozatlan érték. Mivel nekünk a vektorpotenciál leírásához olyan operátor szükséges, amely csupán egy függvénnyel való szorzást jelent, praktikus ezt a síkhullám kifejtést megfeleltetni magának a keresett operátornak. Természetesen, hogy ez kvantummechanikai operátorként viselkedjen a határozatlan A_0 értékét speciálisan kell megválasztanunk. Mielőtt azonban erre rátérnénk, vizsgáljuk meg, milyen általános tulajdonsága van a vektorpotenciálnak az általunk alkalmazott közelítésben. A kölcsönhatási operátor egytagú, elsőrendű közelítésének egyik szükséges feltétele, hogy az impulzus és a vektorpotenciál kommutátora tűnjön el, ebből egyszerűen levezethető a következő

$$[\mathbf{p}, \mathbf{A}] = \frac{\hbar}{i} \mathbf{k} \mathbf{A} + \frac{\hbar}{i} \mathbf{A} \nabla - \frac{\hbar}{i} \mathbf{A} \nabla = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{A}_0 = 0,$$

azaz az \mathbf{A}_0 és \mathbf{k} vektorok merőlegesek egymásra. Ez egy nagyon fontos tulajdonság, amelyet a továbbiakban ki is fogunk használni.

Nekünk a vektorpotenciált, mint kvantummechanikai operátort kell meghatározni. Ennek általánosan alkalmazott módszere, hogy a klasszikusan ismert rendszert (fizikai mennyiséget) kvantáljuk. Jelen esetben ez az A_0 mennyiségen keresztül valósítható meg, úgy, hogy kihasználjuk az elektromágneses energia kvantáltóságát. Ebben a speciális mértékben ($\Phi = 0$) az elektromos térerősség és a mágneses indukció vektora a következő alakba írható:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Az elektromágneses tér energiasűrűsége a fenti mennyiségekből könnyen megadható, így lehetőség nyílik a kvantálásra is: vegyünk egy V térfogatelemet, amelyben egy foton van, ekkor tudjuk, hogy a térfogatban lévő teljes energia megegyezik a foton energiájával:

$$\int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV = \hbar \omega,$$

az integrálandó négyzetes függvények egyszerűen számíthatók:

$$\mathbf{E}^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 = \frac{|\mathbf{A}_0|^2 \omega^2}{2c^2},$$

$$\mathbf{B}^2 = (\nabla \times \mathbf{A})^2 = (\mathbf{k} \times \mathbf{A})^2 = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{A}|^2 \sin^2 \vartheta = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{A}|^2 = \frac{\omega^2 |\mathbf{A}_0|^2}{c^2 2},$$

ahol a \mathbf{B}^2 számításakor kihasználtuk, hogy a \mathbf{k} és \mathbf{A} vektorok merőlegesek (az operátorok kommutativitása miatt), így a vektorszorzatban lévő szög szinusza egy. A fenti eredményeket az integrálba írva a következő A_0 -ra rendezett eredményt kapjuk:

$$A_0^2 = \frac{8\pi c^2 \hbar}{\omega V}.$$

A fent bemutatott eljárást nevezzük dobozkvantálásnak. Végeredménybe már felírhatjuk a vektorpotenciált leíró operátort:

$$\mathbf{A} = \varepsilon \left[2 \sqrt{\frac{\pi c^2 \hbar}{\omega V}} e^{\pm i(\mathbf{k}r - \omega t)} \right],$$

ahol a szögfüggést a ε polarizációs egységvektorral fejezzük ki. Most már teljes egészében meghatároztuk a kölcsönhatási Hamilton-operátort, így visszatérhetünk az arany szabályban is szereplő átmeneti mátrixelemre:

$$M_{fi} = \langle f | \mathbf{H}_I | i \rangle = e \int \psi_b^* e^{i \frac{E_b}{\hbar} t} \left(\frac{\mathbf{A} \mathbf{p}}{mc} \right) \psi_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t} dV,$$

ha a kifejezésbe beírjuk a vektorpotenciálra kapott operátort, valamint kihasználjuk, hogy az exponenciális tagok felcserélhetők az impulzusoperátorral a következő összeget kapjuk:

$$M_{fi} = 2 \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{\pi c^2 \hbar}{\omega V}} \int \psi_b^* e^{\pm i \mathbf{k}r} e^{i(E_b \mp \hbar \omega - E_a)t} \varepsilon \mathbf{p} \psi_a dV$$

Látható, hogy a mátrixelem kettős folyamatot ír le. Ahhoz, hogy az átmenetben biztosított legyen az energia-megmaradás, a mátrixelemnek nem lehet explicit időfüggése, ez a feltétel akkor teljesül, ha:

$$\begin{aligned} E_b &= E_a + \hbar \omega, \\ E_b &= E_a - \hbar \omega. \end{aligned}$$

Az első esetben a végállapot energiája pont egy foton energiájával nagyobb, mint a kezdeti állapot energiája, ez tehát egy foton abszorpcióját írja le, míg a második esetben fordított a helyzet, ott a végállapot energiája kisebb, tehát ez egy foton emisszióját írja le. Mi a bomlási folyamatot kívánjuk leírni, ezért számunkra az összeg második tagja releváns.

Emlékezzünk vissza, hogy a bomlást valószínűségét megadó Fermi arany szabályban szereplő átmeneti mátrixelem alakja milyen is volt (most már kihasználva az energia-megmaradást):

$$M_{fi} = \langle f | \mathbf{H}_I | i \rangle = \int \psi_b^* e^{-i \mathbf{k}r} \varepsilon \mathbf{O} \psi_a d^3 r,$$

ha ezt összehasonlítjuk a fentiekben megkapott mátrixelem, foton emissziót leíró második tagjával, akkor leolvashatjuk a keresett \mathbf{O} operátor alakját:

$$\mathbf{O} = \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{\pi c^2 \hbar}{\omega V}} \mathbf{p}.$$

Ezzel a Fermi aranyszabály mátrixelemének tagjait meghatároztuk, azonban a végállapot sűrűség még nem definiált.

A lehetséges végállapotokat, mint azt a bevezetőben említettünk, kváziklasszikusan közelítjük, amelyhez a kvantálásakor alkalmazott „doboz” virtuális térfogatot használjuk fel: az állapotszám nem lesz más, mint a vizsgált V térfogatú dobozban kialakuló állóhullámok fázistere. Legyen a doboz L oldalhosszúságú kocka, az állóhullámokra vonatkozólag legyen a peremfeltétel a tökéletes reflexió, ez azt jelenti, hogy az elektromos térerősség vektor falon vett értéke nulla. Ezek alapján a térerősség a térirányok szerinti szinuszok szerint változik:

$$E \sim \sin(kr) \Rightarrow \sin(kr)|_{r=L} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_x L = \frac{2\pi}{\lambda_x} L = n_x \pi, \\ k_y L = \frac{2\pi}{\lambda_y} L = n_y \pi, \\ k_z L = \frac{2\pi}{\lambda_z} L = n_z \pi, \end{cases}$$

ahol, $n_i \in \mathbb{N}$. A fenti peremfeltételek mellett az eredő hullámszám-vektor négyzete és a diszperziós reláció módusfüggése:

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

$$\omega^2 = k^2 c^2 = \frac{c^2 \pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{c^2 \pi^2}{L^2} n^2,$$

ahol $n^2 \in \mathbb{N}$. A diszperziós relációból következik, hogy egy adott n rezgési módushoz tartozó állapot többszörösen degenerált (kivéve a vákuum), ill. az, hogy a különböző energiájú állapotok száma a módusok számával kifejezhetőek. Legyen egy bomlás során emittált foton maximális frekvenciája ω , az ehhez tartozó rezgési módus és hullámszám N , ill. k . Vegyük észre, hogy ehhez az állapothoz tartozó degenerációk száma közelíthető módusok terében kifeszített N sugarú gömbfelszín $1/8$ -adával. Az $\omega' < \omega$ frekvenciájú összes állapotok száma pedig közelíthető az N sugarú gömb térfogatának $1/8$ -adával. A közelítés annál jobb, minél nagyobb az L értéke, hiszen akkor az n_i állapotok számossága egyre nagyobb. Az $1/8$ faktor mind a két esetben megjelenik, hiszen számunkra (a koordináta módusok négyzetes összegzés miatt) az $n_i \leftrightarrow -n_i$ cserével kapott állapotok megkülönböztethetetlenek, ezért különböző állapotok csak a mindhárom koordinátában pozitív nyolcadban fordulnak elő ($n_i \geq 0$, $i = x, y, z$). Ezek alapján egy k hullámszámnál nem nagyobb hullámszámú állapotok száma:

$$n_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} N^3 = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kL}{\pi} \right)^3 = \frac{V}{6\pi^2} k^3.$$

A kapott eredmény összefüggést ad, a hullámszám és az állapotszám között. Ha kihasználjuk a diszperziós relációt, megkapjuk az állapotszámot a frekvencia függvényében:

$$n_k = \frac{V}{6\pi^2} k^3 = \frac{V}{6\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3},$$

amelyből az állapotszám energia szerinti deriváltja már könnyen előállítható, ha tudjuk, hogy a foton energiája $E = \hbar\omega$:

$$\frac{dn_k}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} \frac{d\omega}{dE} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar} \frac{\omega^2}{c^3}.$$

A fenti eredményeket összegezve a Fermi aranyszabály:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \frac{\omega^2}{m^2 c^3} \frac{\pi \hbar}{\omega} \left| \int \psi_b^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{p} \psi_a d^3 r \right|^2.$$

A gondolatmenetünkben két elhanyagolást is tettünk. Az egyik az, hogy a bomlás során mozgó hullámok is keletkeznek. Ezek viszont előállíthatók, mint különböző fázisú állóhullámok lineáris kombinációi, ezért ezzel nem követtünk el nagy hibát. A másik elhanyagolás a végállapotok összegzésében történt, ugyanis nem vettük figyelembe, hogy a k egy vektor, ezért az azonos abszolút értékű, de különböző irányú vektorokat egy állapotnak vettük. Ezt viszont korrigálnunk kell.

Tudjuk, hogy bomlás izotrópnak tekinthető, így az $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ történő foton emisszió valószínűsége $d\Omega/(4\pi)$. Végeredménybe a $[k, k+dk]$ és $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ irányú végállapotok száma:

$$dn_k = \frac{V k^2}{8\pi^3} dk d\Omega = \frac{V \omega^2}{8\pi^3 c^2} d\omega d\Omega,$$

amelyből a számunka szükséges derivált:

$$\frac{dn_k}{dE} = \frac{V}{8\pi^3} \frac{\omega^2}{c^3} \frac{d\omega}{dE} d\Omega = \frac{V}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^2}{\hbar} d\Omega.$$

A szögfüggéssel kiegészített aranyszabály:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^2}{m^2 \hbar} \frac{\pi \hbar}{\omega} \int \left| \int \psi_b^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{p} \psi_a d^3 r \right|^2 d\Omega.$$

Mielőtt rátérnénk a fenti kifejezés speciális esetek vonatkozó tárgyalására, alkalmazzunk egy egyszerű trükköt. A trükk nem más, mint, hogy az integrálban szereplő impulzusoperátort kicseréljük a helyoperátorra. Ez általános esetben is megtehető, ha a rendszer Hamilton-operátorában

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}$$

akkor a kvantummechanikai időderivált alapján ($\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}$):

$$[\mathbf{H}, \mathbf{r}] = \frac{\hbar}{i} \frac{\mathbf{p}}{m} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{im}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{r}].$$

1.3.1. Elektromos dipólközelítés (E1)

A γ -bomlás Fermi modelljében az átmeneti valószínűséget megadó mátrixelem egyszerű esetekben plusz információt ad a bomlás jellegéről. Egy egyszerű eset a dipólközelítés, ekkor az integrálban szereplő, kimenő síkhullámot megadó függvényt sorfejtéssel közelítjük úgy, hogy csak a nulladrendű tagot vesszük figyelembe:

$$e^{-i\mathbf{kr}} \approx 1 - i\mathbf{kr} + \dots \Rightarrow e^{-i\mathbf{kr}} \approx 1.$$

Az arany szabályban szereplő mátrixelemet a közelítés alapján egyszerűsítjük, valamint az impulzus operátort a fenti kommutátorral helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \langle \psi_b | e^{-i\mathbf{kr}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{p} | \psi_a \rangle &\approx \boldsymbol{\varepsilon} \langle \psi_b | \mathbf{p} | \psi_a \rangle = \frac{im}{\hbar} \boldsymbol{\varepsilon} \langle \psi_b | [\mathbf{H}, \mathbf{r}] | \psi_a \rangle = \frac{im}{\hbar} \boldsymbol{\varepsilon} \langle \psi_b | [\mathbf{H}_0, \mathbf{r}] + [\mathbf{V}, \mathbf{r}] | \psi_a \rangle = \\ &= \frac{im}{\hbar} (E_b - E_a) \langle \psi_b | \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} | \psi_a \rangle = im \omega_{ba} \langle \psi_b | \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} | \psi_a \rangle, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $[\mathbf{V}, \mathbf{r}] = [\mathbf{A} \mathbf{p}, \mathbf{r}] = -\mathbf{A} \frac{\hbar}{i}$, amelyből a mátrixelem $\langle \psi_b | \mathbf{A} | \psi_a \rangle = \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\omega t} \langle \psi_b | e^{-i\mathbf{kr}} | \psi_a \rangle \approx \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\omega t} \langle \psi_b | 1 | \psi_a \rangle = 0$, ill. ne felejtsük el, hogy a hullámfüggvények a szabad Hamilton-operátor sajátfüggvényei! Ezzel a közelítéssel arany szabály:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2 \omega^3}{(2\pi c)^3} \int_{4\pi} |\langle \psi_b | \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} | \psi_a \rangle|^2 d\Omega.$$

A következőkben megkeressük az E1 átmenet kiválasztási szabályait. Ehhez első lépésben a bra-ket mátrixelemet fejtsük ki, annak ismeretében, hogy a mag sajátfüggvényeit a szög és helyváltozó szerinti függvények szorzataként keressük:

$$\psi_i = \frac{1}{r} R_{n_i, l_i}(r) Y_{l_i, m_i}(\Omega),$$

ahol Y_{lm} a gömbfüggvények, R_{nl} valamilyen ismeretlen radiális függvények. A gömbfüggvények használata jogos, hiszen a perturbálatlan rendszer sajátfüggvényeiről van szó. Így a keresett mátrixelem:

$$\langle \psi_b | \mathbf{e}r | \psi_a \rangle = \int_0^\infty dr R_{n_b l_b}^* R_{n_a l_a} \int d\Omega Y_{l_b m_b}^* \mathbf{e}r Y_{l_a m_a},$$

a polarizációs vektorról tudjuk, hogy egységvektor, ezért célszerű a helyvektort is felírni, mint egy egységvektor konstans szorosa: $\mathbf{r} = r \cdot \hat{\mathbf{r}}$, és $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$, ezzel a paraméterezéssel a fenti integrálban egységvektorok skalárszorzata szerepel, amit egy kis trükkel kifejthetünk a megfelelő gömbfüggvények segítségével:

$$\mathbf{e}\hat{\mathbf{r}} = \varepsilon_x \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon_y \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon_z \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\varepsilon_z Y_{10} + \frac{-\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{11} + \frac{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1-1} \right),$$

mindezek figyelembevételével a mátrixelem

$$\langle \psi_b | \mathbf{e}r | \psi_a \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^\infty r^3 dr R_{n_b l_b}^* R_{n_a l_a} \int d\Omega Y_{l_b m_b}^* \left(\varepsilon_z Y_{10} + \frac{-\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{11} + \frac{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1-1} \right) Y_{l_a m_a}.$$

A kapott integrál szögfüggő részének megoldása meglehetősen bonyolult, viszont az impulzuszórára vonatkozó Clebsch-Gordan együtthatók segíthetnek a probléma megoldásában. Ehhez fel kell írunk, hogy két gömbfüggvény szorzata, hogyan állítható elő, mint gömbösszege (ez teljesen analóg azzal az esettel, amikor különböző spinek direkt szorzatát felírjuk, mint spinek (SU(2) irreducibilis ábrázolások) direkt összege, csak jelen esetben a szimmetriacsoport az SO(3)) (Appendix B):

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{l=(l_1-l_2)}^{l_1+l_2} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm}^*(\theta, \varphi).$$

ahol a 2*3 objektumok a Wigner 3j-szimbólomokat (Appendix B) jelölik. Ezek után első lépésben írjuk fel a kezdeti impulzuszórá (Y_{l_am_a}) és egy foton (Y_{l_m}) szorzatának kifejtését:

$$Y_{l_m}(\theta, \varphi) Y_{l_a m_a}(\theta, \varphi) = \sum_{l=(l_1-1)}^{l_1+1} \sqrt{\frac{3(2l_a+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l \\ m & m_2 & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm'}^*(\theta, \varphi),$$

majd szorozzuk be a végállapotot jellemző gömbfüggvénnyel balról és integráljuk a térszög szerint. Ha kihasználjuk a gömbfüggvények ortogonalitását akkor a következőt kapjuk

$$\int d\Omega Y_{l_b m_b}^* Y_{l_m}(\theta, \varphi) Y_{l_a m_a}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3(2l_b+1)(2l_a+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ m & m_a & m_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a számunkra fontos mátrixelem szögfüggő része egy olyan 3 tagú összeg, ahol a fenti gömbfüggvény-szorzatokkal analóg tényezők integráljai szerepelnek, különböző mágneses momentumú fotonokkal (m = -1, 0, 1):

$$\langle \psi_b | \mathbf{er} | \psi_a \rangle \Rightarrow \int d\Omega \left(\varepsilon_z Y_{l_b m_b}^* Y_{10} Y_{l_a m_a} + \frac{-\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{l_b m_b}^* Y_{11} Y_{l_a m_a} + \frac{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{l_b m_b}^* Y_{1-1} Y_{l_a m_a} \right),$$

a fentiekkel mintájára előállítható az integrál:

$$\langle \psi_b | \mathbf{er} | \psi_a \rangle \Rightarrow \sqrt{\frac{3(2l_a + 1)(2l_b + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\varepsilon_z \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ 0 & m_a & m_b \end{pmatrix} + \frac{-\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ -1 & m_a & m_b \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & l_a & l_b \\ 1 & m_a & m_b \end{pmatrix} \right).$$

A kapott eredmény a gömbfüggvények ortonormált rendszerével értelmezhető. A fentiekből láthattuk, hogy a 3-as gömbfüggvény szorzat felírható, mint két gömbfüggvény szorzatok összege. Ha a kapott összegkifejtés integráljuk a teljes térszögre az ortonormáltság miatt következőt kapjuk:

$$\int d\Omega Y_{l_b m_b}^*(\Omega) Y_{l_a m_a}(\Omega) = \delta_{l_b l_a} \delta_{m_b m_a},$$

ahol az l és m indexek az Clebsch-Gordan kifejtés összegző indexei, amely szerint ebben az esetben a lehetséges végállapotok:

$$l_a - 1 \leq l_b \leq l_a + 1, \\ m_a - 1 \leq m_b \leq m_a + 1.$$

A E1 átmenetre vonatkozó kiválasztási szabályok tehát:

$$l_b - l_a = \Delta l = \pm 1, 0.$$

Még figyelembe kell vennünk, hogy a γ -bomlás esetében a paritás megmaradó mennyiség, ezért amikor a mag kibocsát egy foton, paritás szempontjából páratlan mennyiséget (Y_{1m}), akkor a bomlás utáni mag paritásának meg kell változnia, azaz $l_b \neq l_a$. Így a nulla átmenet is tiltott! Az m kvantumszám változását is a foton lehetséges értékei határozzák meg (a Clebsch-Gordan együtthatókon keresztül):

$$\Delta m = \pm 1, 0.$$

A spinről ebben a tárgyalásban nem beszéltünk, viszont belátható, hogy a spin kvantumszáma nem változik a γ -bomlás E1 átmenete során. Ez abból következik, hogy a kölcsönhatási operátorban a közelítés első rendjében nem szerepel a spinnel arányos tag.

1.3.2. Mágneses dipól (M1) átmenet

Ahhoz, hogy a magasabb rendű átmeneteket vizsgáljuk az eredeti arany szabályban szereplő síkhullám komponenszt a sorfejtés magasabb rendjében kell megtartani,

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{(2\pi c)^3} \frac{\omega^2}{m^2 \hbar} \frac{\pi \hbar}{\omega} \int \int_{4\pi} |\int \psi_b^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{p} \psi_a d^3 r|^2 d\Omega.$$

A sorfejtés másodrendig vegyük figyelembe, azaz

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \approx 1 - i\mathbf{k}\mathbf{r} + \dots$$

Ezzel a bra-ket szimbolikus jelöléssel az elektromos dipólátmenet mellett megjelenő plusz mátrixelem a következő:

$$\langle \psi_b | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{p} | \psi_a \rangle \approx \text{dipol} - i \langle \psi_b | (\mathbf{k}\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{p}) | \psi_a \rangle,$$

látható, hogy ebben az esetben a mátrixelem négy, 3 komponensű operátor szorzatát tartalmazza, viszont szerencsés helyzetben vagyunk, hiszen a \mathbf{p} kivételével a többi operátor csak szorzás értékű műveletet jelent. A további vizsgálatok előtt, a dipólközelítéshez hasonlóan, végezzünk némi átalakítást az operátorokon. Első lépésben számítsuk ki a zárójeles operátorszorzatok kommutátorát:

$$[\mathbf{k}\mathbf{r}, \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{p}] = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \mathbf{r} \mathbf{p} - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \mathbf{r} \mathbf{p} - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \frac{3\hbar}{i} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} \frac{3\hbar}{i},$$

ahol kihasználtuk a hely és impulzus operátorok kommutációs relációját. Azt szeretnénk, ha a fenti kommutátor nulla lenne, mint azt látjuk, ez csak akkor teljesülhet, ha a polarizációs vektor és a hullámszám-vektor ortogonálisak: $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} = 0$. Ez viszont ekvivalens a kölcsönhatás leírásánál feltételezett $\mathbf{A} \mathbf{k} = 0$ feltevésével, hiszen a vektorpotenciál szögfüggését az $\boldsymbol{\varepsilon}$ hordozza. Ezek után nézzünk egy általános összefüggést a \mathbf{k} , \mathbf{p} , \mathbf{r} vektorok között (a következő képletben szereplő mennyiségek vektoroknak tekintendők):

$$\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{r}}) - \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{k}} \times (\bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{r}}) = -\bar{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{L}},$$

a fenti összefüggést alkalmazzuk az operátorokra is, ezzel a mátrixelemben szereplő operátorszorzat összegre alakítható (a polarizációs vektort egyenlőre elhagyjuk):

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}\mathbf{r}) = -\mathbf{k} \times \mathbf{L} + \mathbf{r}(\mathbf{k}\mathbf{p}).$$

Ha a fenti kifejezés mindkét oldalához hozzáadunk $\mathbf{p}(\mathbf{k}\mathbf{r})$ -t és a kifejezést osztjuk kettővel a következőt kapjuk:

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{L} + \frac{1}{2} [\mathbf{r}(\mathbf{k}\mathbf{p}) + \mathbf{p}(\mathbf{k}\mathbf{r})],$$

alkalmazzuk a jobb oldalon a $\mathbf{p} = \frac{im}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{r}]$ összefüggést

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{L} + \frac{1}{2} [\mathbf{r}(\mathbf{k}[\mathbf{H}, \mathbf{r}]) + [\mathbf{H}, \mathbf{r}](\mathbf{k}\mathbf{r})] \frac{im}{\hbar} = -\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{L} + \frac{im}{2\hbar} [\mathbf{H}, (\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}],$$

a jobb oldalon megjelent a $(\mathbf{kr})\mathbf{r}$ operátor kvantummechanikai időderiváltja! Végeredményben a következő integrált kapjuk:

$$\int \psi_b^* \left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k} \times \mathbf{L})}{2} + \frac{im}{2\hbar} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{H}, (\mathbf{kr})\mathbf{r}] \right) \psi_a d^3r.$$

A fenti összefüggés két tagja két különböző átmenetet ír le: az első a mágneses dipólátmenet (M1), míg a második az elektromos kvadrupól átmenet (E2). Először foglalkozzunk az M1 esetével.

Az M1 átmenet vizsgálatához tegyük meg a következő átrendezést:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{k}) = \mathbf{L}|\boldsymbol{\varepsilon}||\mathbf{k}| = \mathbf{L} \frac{\omega}{c},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{k} = 0$ és, hogy $|\boldsymbol{\varepsilon}| = 1$, $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Ezt visszahelyettesítjük az arany szabályba és a konstansokat megfelelően rendezzük, a következőt kapjuk:

$$W_{M1} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} \int d\Omega \left| \int \psi_b^* \frac{e\mathbf{L}}{2mc} \psi_a dV \right|^2 = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} \int d\Omega \left| \langle \psi_b | \frac{e\mathbf{L}}{2mc} | \psi_a \rangle \right|^2.$$

Ha a koordináta-rendszerünket úgy választjuk meg, hogy az átmenet során a mágneses momentumnak csak a „z” komponense maradjon meg, akkor az impulzusmomentum operátornak csak a „z” komponense ad járulékot, tehát a mátrixelem egyszerűsödik:

$$W_{M1} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} \int d\Omega \left| \langle \psi_b | \frac{e\mathbf{L}_z}{2mc} | \psi_a \rangle \right|^2.$$

Általánosan elmondhatjuk, hogy a mágneses dipólközelítésben tárgyalt átmenetet az impulzusmomentum operátor magfüggvények közti mátrixeleme határozza meg. Ezért figyelembe kell vennünk azt a tényt, hogy az általunk leírni kívánt magok rendelkeznek nem nulla saját impulzusmomentummal, azaz spinnel. Azt tudjuk, hogy a nem nulla spinű, több komponensű, nem skalárfüggvénnyel leírható objektumok impulzusmomentum algebrája csak akkor teljes, ha figyelembe vesszük a spint is. Ennek következtében, amennyiben egy nem nulla spinű rendszer leírásakor megjelenik az impulzusmomentum operátor, akkor azt ki kell egészítenünk a spint leíró operátorral:

$$\mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J},$$

ahol \mathbf{J} jelöli a teljes impulzusmomentum operátort. A tényleges átmeneti mátrixelem:

$$\langle \psi_b | \frac{e\mathbf{L}}{2mc} | \psi_a \rangle \Rightarrow \langle \psi_b | \frac{g_J \mathbf{J}}{2mc} | \psi_a \rangle.$$

Az, hogy a számításaink során nem jelent meg a spin operátor, annak a következménye, hogy mi a Schrödinger egyenletből indultunk ki, amely alapvetően nem tartalmazza a spint. A helyes leíráshoz a Dirac-egyenlet nem relativisztikus limeséből kapható Pauli-Schrödinger-egyenletből kellett volna kiindulnunk.

A \mathbf{J} operátorról tudjuk, hogy a spin és a pályamomentum operátorok összegeként állítható elő. Az \mathbf{L} -ről egyszerűen belátható, hogy paritás szempontjából páros operátor:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \xrightarrow{T: x \rightarrow -x} (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L},$$

a páros tulajdonság a spin operátorra is igaz, ebből következik, hogy maga a \mathbf{J} is páros. Egy páros operátor viszont nem tudja megváltoztatni egy adott állapot paritását, így elmondhatjuk, hogy az M1 átmenet során nem történik paritásváltás (nem úgy, mint az E1 átmenet során)!

1.3.3. Elektromos kvadrupól átmenet (E2)

Eddig a síkhullám sorfejtés első rendű tagjának az impulzusmomentummal arányos tagját vizsgáltuk, így megkaptuk a mágneses dipólátmenetek (M1) kiválasztási szabályait. Térjünk át a második komponensre, ennek a mátrixeleme:

$$\langle \psi_b | \frac{im}{2\hbar} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{H}, (\mathbf{kr})\mathbf{r}] \psi_a \rangle = \int \psi_b^* \left(\frac{im}{2\hbar} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{H}, (\mathbf{kr})\mathbf{r}] \right) \psi_a d^3r,$$

amely megfeleltethető az elektromos kvadrupólátmenetnek (E2). Az elektromos dipólközelítésnél alkalmazott bra-ket jelöléssel kifejezhető a kommutátor mátrixeleme, ezzel egyszerűsíthető az átmeneti mátrixelem:

$$\begin{aligned} \frac{im}{2\hbar} \langle \psi_b | \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr}) - (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr})\mathbf{H}_0 | \psi_a \rangle &= \frac{im}{2\hbar} \langle \psi_b | \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr}) - (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr})\mathbf{H}_0 | \psi_a \rangle = \\ &= \frac{im}{2\hbar} (E_b - E_a) \langle \psi_b | (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr}) | \psi_a \rangle = \frac{im\omega_{ba}}{2} \langle \psi_b | (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr}) | \psi_a \rangle, \end{aligned}$$

ahol szintén kihasználtuk, hogy $[\mathbf{V}, \mathbf{r}] = [\mathbf{V}, \mathbf{k}] = 0$. A kapott mátrixelem vektoroperátorok skalárszorzatait tartalmazza. Mivel az operátorok csak számmal való szorzást jelentenek, fejtjük ki a hely operátort, mint egy egységvektor és egy szám szorzata, majd a polárkoordináták szerint, írjuk ki a skalárszorzatokat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r} &= r(\varepsilon_x \sin \vartheta \cos \varphi + \varepsilon_y \sin \vartheta \sin \varphi + \varepsilon_z \cos \vartheta), \\ \mathbf{kr} &= r(k_x \sin \vartheta \cos \varphi + k_y \sin \vartheta \sin \varphi + k_z \cos \vartheta), \end{aligned}$$

majd a két skalárszorzat kifejtést összeszorozva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})(\mathbf{kr}) &= k_x \varepsilon_x \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + k_y \varepsilon_y \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + k_z \varepsilon_z \cos^2(\vartheta) + \\ &+ (k_x \varepsilon_y + \varepsilon_x k_y) \sin^2(\vartheta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + (k_x \varepsilon_z + \varepsilon_x k_z) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) + \\ &+ (k_y \varepsilon_z + \varepsilon_y k_z) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi). \end{aligned}$$

A ϑ és φ polárkoordináták szögfüggvény-kombinációit kifejezhetjük az $Y_{2m}(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvényekkel, ahhoz hasonlóan, ahogy azt az elektromos dipólközelítésnél is megtettük az $Y_{1m}(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvényekkel:

$$\begin{aligned}\cos^2 \vartheta &= \frac{1}{3} \left(4 \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20} + 1 \right), \\ \sin^2 \vartheta &= \frac{1}{3} \left(-4 \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20} + 2 \right), \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2-1} - Y_{21}), \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi &= i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{21} + Y_{2-1}), \\ \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi &= i 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2-2} - Y_{22});\end{aligned}$$

valamint, ha kihasználjuk a következő trigonometrikus azonosságot:

$$\begin{aligned}2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi &= \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi) + \sin^2 \vartheta, \\ -2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi &= \sin^2 \vartheta \cos(2\varphi) - \sin^2 \vartheta,\end{aligned}$$

akkor a maradék két kifejezés is átalakítható:

$$\begin{aligned}\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2-2} + Y_{22}) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20} \right), \\ \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi &= -\sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2-2} + Y_{22}) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20} \right).\end{aligned}$$

A szabad Hamilton-operátor sajátfüggvényeit ismét felírjuk, mint egy távolságtól függő függvény és egy gömbfüggvény szorzata:

$$\psi_i = R_{n,l_i}(r) Y_{l_i, m_i}(\Omega),$$

akkor a fenti gömbfüggvényes kifejtéseket helyettesítve a mátrixelembe, olyan integrált kapunk, ahol a szög szerinti integrálás – a dipólközelítéshez hasonlóan – 3 gömbfüggvény szorzataiból álló összeget tartalmaz, a különbség csak annyi, hogy a középső gömbfüggvény $Y_{2m}(\vartheta, \varphi)$ típusú:

$$\langle \psi_b | (\mathbf{er})(\mathbf{kr}) | \psi_a \rangle \sim \int dr r^4 R_{n_b, l_b}^* R_{n_a, l_a} \int d\Omega \sum_i a_i Y_{l_b, m_b}^* Y_{2i} Y_{l_a, m_a},$$

ahol az a_i együtthatók a skalárszorzatból és a gömbfüggvény-kifejtésből származó konstansok. A kiválasztási szabályok megtalálása szempontjából fontos járulékot, csak a lehetséges gömbfüggvény szorzatok integrálja adja. Ezen integrálok a Clebsch-Gordan együtthatók segítségével könnyen meghatározhatók. Első lépésben a kezdeti állapothoz tartozó és az $Y_{2m}(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvény szorzatát írjuk fel, mint gömbfüggvények összege:

$$Y_{2m}(\theta, \varphi)Y_{l_a m_a}(\theta, \varphi) = \sum_{l=(l_1-2)}^{l_1+2} \sqrt{\frac{5(2l_a+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 2 & l_a & l \\ m & m_a & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & l_a & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm'}(\theta, \varphi).$$

Másodszor a fenti eredményt szorozzuk be balról a végállapot gömbfüggvényének komplex konjugáltjával, majd integráljuk a teljes térszög szerint:

$$\int d\Omega Y_{l_b m_b}^* Y_{2m}(\theta, \varphi) Y_{l_a m_a}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5(2l_a+1)(2l_b+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} 2 & l_a & l_b \\ m & m_a & m_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & l_a & l_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

itt ismét kihasználtuk a gömbfüggvények ortogonalitását. Ezen általános eredmény alapján az átmenetet megadó integrál szögfüggő része helyettesíthető, mint a megfelelő Clebsch-Gordan együtthatók összege. Ha ezen általános eredmény alapján elvégezzük az integrál egyes komponenseinek kiszámítását, az ortogonalitás következtében látható, hogy a csak azok a komponensek adnak nem nulla járulékot, ahol a kezdeti és végállapot kvantumszámaira teljesülnek a következő összefüggések:

$$l_b - l_a = \Delta l = \pm 2, \pm 1, 0;$$

$$m_b - m_a = \Delta m = \pm 2, \pm 1, 0.$$

Ezzel megkaptuk a kvadrupól átmenet kiválasztási szabályait. Még meg kell vizsgálnunk az átmenetet a paritás szempontjából is. Az átmeneti mátrixelembe, még a skalárszorzat kifejtése előtt láthattuk, hogy a hely operátor kétszer szerepel, ez alapján a tértükrözés hatására a szorzatoperátor láthatóan paritás szempontjából páros mennyiség:

$$(\boldsymbol{\epsilon r})(\mathbf{k r}) \xrightarrow{T: x \rightarrow -x} (-\boldsymbol{\epsilon r})(-\mathbf{k r}) = (\boldsymbol{\epsilon r})(\mathbf{k r}).$$

Ha az átmenetet leíró operátor páros, akkor nem tudja megváltoztatni a kezdeti állapot paritását, ezért a kvadrupól átmenet során a paritás az M1-hez hasonlóan nem változik! Az eddigiek alapján már körvonalazódik egy általános szabály, mely a különböző rendű elektromos és mágneses multipól átmenetek paritására gyakorolt hatását írja le:

- l, m elektromos multipól átmenetnél a paritás: $(-1)^l$;
- l, m mágneses multipól átmenetnél a paritás: $-(-1)^l$.

1.3.4. Belső konverzió

Eddig olyan folyamatokat vizsgáltunk, amelyek során a mag a gerjesztett állapotból való alacsonyabb energiájú állapotba való kerüléséhez a felesleges energiát γ -foton emisszió során adta le. A foton emisszió mellett az atommag úgy is képes megszabadulni a gerjesztési energiájától, hogy foton emisszió helyett közvetlenül a magot körülvevő elektronok egyikének adja át a szükséges energiát. A kötött állapotban lévő elektron, ha nagyobb energiát kap, mint a kötési energiája, akkor kilökődik az atomból és szabad elektronnak viselkedik, míg ha az energia egyenlő vagy kisebb, mint az elektron kötési energiája, akkor a bomlás nem megy végbe. Ezt a folyamatot nevezzük belső konverzióknak.

Taylor és *Mott* a belső konverzióval kiegészített γ -bomlás teljes átmeneti valószínűségét a következő formulával írták le:

$$\hat{T}_{ba} = (1 + \alpha)T_{ba} = T_{ba} + T_{ba}^i,$$

ahol T_{ba} az $a \rightarrow b$ elektromos és mágneses multipól átmenet valószínűsége, α a belső konverziós együttható. Az energiaátadás az atommag és az elektron között elektromágneses kölcsönhatással, azaz foton csere révén valósul meg, amely főként az elektrosztatikus Coulomb kölcsönhatásból származtatható. A következőkben ezt a folyamatot vizsgáljuk meg egy speciális esetben:

- csak a K átmenetet nézzük, azaz a mag energiája az atom K héján levő elektronnak adódik át;
- csak az elektrosztatikus kölcsönhatást vesszük figyelembe;
- az elektronra a nem relativisztikus hullámegyenletet alkalmazzuk, így feltételezzük, hogy a folyamat során az elektron sebessége jóval kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség;
- az atomból kilökött elektront síkhullámként írjuk le, ez a feltételezés akkor helyénvaló, ha a kilökött elektron energiája nagyobb, mint az adott atom K héjának kötési energiája.

Jelöljük a mag a és b állapotaihoz tartozó hullámfüggvényeket φ_a és φ_b -vel, amelyek függenek a nukleonok koordinátáitól. Az állapotok energiaviszonyai a bomlással összhangban $E_a > E_b$. A K héjon kötött elektron hullámfüggvényét jó közelítéssel a hidrogénatom megfelelő kvantumszámú ($n = 1, l = 0, m = 0$) sajátfüggvényével írhatjuk le

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \quad a = \frac{a_0}{Z},$$

ahol $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ a Bohr-sugár. A szabad elektronra vonatkozó (kimenő) síkhullám:

$$\varphi_b = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

ahol \mathbf{k} a szabad elektron hullámszám-vektora. Az átmeneti valószínűséget megadó aranszabály a következő alakba írható:

$$T_{ba}^i(\Omega) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle|^2 n(k) d\Omega,$$

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \int \psi_b^* \varphi_b^* \mathbf{H}' \psi_a \varphi_a dV,$$

ahol \mathbf{H}' a kölcsönhatási operátor, $n(k)d\Omega$ a $d\Omega$ térszög irányába kilökött elektron adott energiához tartozó lehetséges állapotainak száma, amely könnyen kifejezhető:

$$n(k) = V \frac{mk\hbar}{(2\pi\hbar)^3}.$$

ahol m az elektrontömeg. Ahhoz, hogy megkapjuk a belső konverzió teljes átmeneti valószínűségét, integrálnunk kell a szabad elektron minden lehetséges repülési irányára:

$$T_{ba}^i = 2 \frac{2\pi}{\hbar} n(k) \int |\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle|^2 d\Omega,$$

a kifejezésben szereplő 2-vel való szorzás, azért szerepel, mert a vizsgált K héjon két kötött elektron van, így a kölcsönhatás esélye is a kétszeresére nő. A kölcsönhatási operátort a magban lévő protonok és a K héjon lévő elektron közti Coulomb-potenciállal írhatjuk le:

$$H' = \sum_i^Z \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

amellyel a keresett kölcsönhatási mátrixelem

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{1}{\sqrt{(\pi a^3 V)}} \sum_i^Z \int d^3 r \int dR e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_b^*(R) \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} e^{-\frac{r}{a}} \psi_a(R),$$

ahol az r változóra vett integrál az elektron koordinátája, míg az R a magok nukleonjainak koordinátájára vonatkozik, ezért $dR = d^3 r_1 \dots d^3 r_Z$. Az integrál kiértékeléséhez kihasználjuk, hogy a kölcsönhatási operátorban szereplő $r = |\mathbf{r}|$ elektron koordináta sokkal nagyobb, mint a protonokat leíró $r_i = |\mathbf{r}_i|$ koordináta. Ebben az esetben alkalmazhatjuk a következő gömbfüggvények szerinti kifejtést (Appendix B):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_i^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Theta, \Phi) Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i),$$

ahol Θ és Φ az \mathbf{r} vektor polárszögei, míg θ_i ϕ_i az \mathbf{r}_i vektor polárszögei. Ha a közelítést visszaírjuk a mátrixelemet megadó integrálba a következőt kapjuk:

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{e}{\sqrt{\pi a^3 V}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm}(ab) J_{lm},$$

ahol a Q az elektromos multipól mátrixelem általános formája

$$Q_{lm}(ab) = e \sum_{i=1}^Z \int r_i^l Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i) \psi_b^* \psi_a dR,$$

míg J integrál

$$J_{lm} = \int e^{-\frac{r}{a}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} r^{-l-1} Y_{lm}(\Theta, \Phi) d^3 r.$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi integrálban már csak az elektronra vonatkozó függvények szerepelnek, amely így már kiszámítható. Ehhez a kimenő síkhullámot kifejtjük a gömbfüggvények szerint:

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_l \sum_m i^l j_l(kr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}),$$

ahol a \hat{k} és az \hat{r} a megfelelő vektorok térszögeinek felelnek meg. Ezt visszahelyettesítve a J_{lm} formulájába, a szög szerinti integrálás a gömbfüggvények ortonormáltsága mellett könnyen elvégezhető, az így kapott eredmény:

$$J_{lm} = 4\pi i^l \int e^{-\frac{r}{a}} r^{-l+1} j_l(kr) dr Y_{lm}(\Theta, \Phi) = 4\pi i^l \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \int e^{-\frac{r}{a}} r^{-l+\frac{1}{2}} J_{l+1/2}(kr) dr Y_{lm}(\Theta, \Phi),$$

ahol kihasználtuk az $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$ azonosságot. Az r változóra vonatkozó integrál olyan alakú, hogy azt speciálisan ki lehet értékelni, a megoldás a következő (ld. Gradstein, Table of Integrals, 699. o.):

$$\int e^{-\alpha r} r^{\mu-1} J_\nu(\beta r) dr = \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \Gamma(\mu + \nu)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^{\mu+\nu}} \Gamma(\nu + 1)} F\left(\frac{\mu + \nu}{2}; \frac{1 - \mu + \nu}{2}; \nu + 1; \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}\right),$$

ahol $\Gamma(x)$ a gamma-függvény, $F(a;b;c;x)$ a hipergeometrikus függvény. A vizsgált konkrét esetben a kifejezés paraméterei a következők:

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \nu = l + \frac{1}{2}, \quad \beta = k, \quad \mu = -l + \frac{3}{2};$$

melyekkel a megoldás némi számolás után a következő alakba írható:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \int e^{-\frac{r}{a}} r^{-l+\frac{1}{2}} J_{l+1/2}(kr) dr = \frac{k^{l-2}}{(2l+1)(2l-1)!!(1+(ka)^{-2})} F\left(1; l + \frac{3}{2}; \frac{1}{1+(ka)^{-2}}\right),$$

ahol kihasználtuk, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ és $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$. A továbblépéshez alkalmazzuk azt a közelítést, hogy a kilépő elektron hullámhossza jóval kisebb, mint a Bohr-sugár, ezzel $\lambda \ll a \Rightarrow 1 \ll ka \Rightarrow (ka)^{-2} \approx 0$, ezáltal a hipergeometrikus függvény közelítő értéke (Table of Integrals: 1008.o. alapján):

$$F\left(1; l + \frac{3}{2}; 1\right) = (2l+1).$$

A kapott eredményt visszaírva az integrál megoldásába, a J_{lm} -re a következőt kapjuk:

$$J_{lm} = 4\pi i^l \frac{k^{l-2}}{(2l-1)!!} Y_{lm}(\Theta, \Phi),$$

ahol a szemi-faktoriális

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

ill. a ϑ és ϕ szögek a \mathbf{k} hullámszám-vektor polárszögei. A J_{lm} -re kapott összefüggést visszaírhatjuk a kölcsönhatási mátrixelembe:

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{(4\pi)^2 e}{\sqrt{\pi a^3 V}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{i^l k^{l-2}}{(2l+1)!} Q_{lm}(ab) Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$

Az átmeneti valószínűség számításához a fenti mátrixelem abszolút érték négyzetét kell integrálnunk a kirepülő elektron repülési irányaira. Vegyük észre, hogy az irányokat leíró térszög koordinátái nem mások, mint a mátrixelemben szereplő gömbfüggvény változói. Mivel szögfüggés csak azokban jelennek meg, az integrálás az ortonormalitást kihasználva könnyen kiszámítható:

$$T_{ba}^i = 2 \frac{2\pi}{\hbar} V \frac{mk\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int |\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle|^2 d\vartheta d\phi = 128\pi \frac{me^2}{\hbar^3 a^3} \frac{k^{2l-3}}{[(2l+1)!]^2} |Q_{lm}(ab)|^2.$$

Számunka az igazán fontos mennyiség a gamma-bomláson belüli belső konverzió hányadát kifejező α együttható. A fenti képletből leolvasható, hogy jelentős járulékot csak a legkisebb l értékekre kaphatunk, mivel magasabb értékekre a nevező túl nagy értéket vesz fel. Ha figyelembe vesszük, hogy a megfelelő elektromos multipól átmenet felírható általánosan

$$T_{ab}(l, m) = \frac{Z_0 \omega}{2} \frac{\kappa^{2l}(l+1)}{l[(2l+1)!]^2 \hbar} |Q_{lm}(ab)|^2,$$

akkor a $T^i(a, b) = \alpha T(a, b)$ összefüggés alapján az együttható értéke egyszerűen leolvasható:

$$\alpha \cong 256 \frac{me^2}{\hbar^2 a_0^3} \frac{Z}{Z_0 \omega} \frac{l}{l+1} \frac{k^{2l-3}}{\kappa^{2l}},$$

ahol a_0 a Bohr-sugár, κ az emittált foton hullámszáma. Mint látható, a belső konverzió hányada Z növekedésével emelkedik. Fontos megjegyezni, hogy a számításoknál csak a Coulomb-potenciált vettük figyelembe, ezért találtuk meg a fenti kapcsolatot az elektromos átmenetekkel. Ha az általános elektromágneses kölcsönhatás mátrixelemét használtuk volna, akkor a belső konverzióval történő átmenetben megjelentek volna a mágneses átmenetek mátrixelemei is.

A kísérleti eredmények is azt mutatják, hogy a K-átmenettel történő belső konverzió valóban függ a sugárzás energiájától, a lehető legkisebb L multipól rendjétől és a mag protonszámától, azonban nem függ a multipól Q_{lm} momentumától.

1.3.4.1. A 0→0 átmenetek

A belső konverzió egy legérdekesebb megnyilvánulása az a speciális átmenet, amikor $J=0$. Ez a hagyományos elektromágneses bomlás esetén tiltott átmenet, mind elektromos,

mind mágneses esetben, azonban K-elektron kilökésével járó bomláskor megvalósuló folyamat. A belső konverziós mátrixelemet

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{e}{\sqrt{\pi a^3 V}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Q_{lm}(ab) J_{lm}$$

vizsgálva úgy tűnhet, hogy ez a $J=0$ átmenet esetén eltűnik, mivel tartalmazza a Q_{lm} elektromos multipól-momentumot. Viszont nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a fenti képlet meghatározásához kihasználtuk, hogy az elektron a magon kívül van ($r > r_i$). A teljes számításhoz természetesen azt az esetet is vizsgálnunk kell amikor $r < r_i$, amelyről kimutatható, hogy általában nem ad jelentős járulékot akkor, ha $l \neq 0$. A $0 \rightarrow 0$ átmenet esetében, azonban pont ez a járulék teszi lehetővé a bomlást: az ilyen átmenetekben nincs foton emisszió, hiszen a *Mott* féle α belső konverziós együtthatóval kifejezett átmeneti valószínűség T_{ab} értelmezhetetlen. Ezért az energiáttranszfernek a mag és az elektron között közvetlenül kell megvalósulnia! A közvetlen energiaátadáshoz a kölcsönhatást azon a tartományon kell értelmezni, ahol $r < r_i$, tehát pont az a járulék marad meg, melyet az $0 < l$ esetekben elhanyagoltunk. A potenciált most is gömbfüggvények szerint kifejtjük, viszont az átmenet miatt csak az $l = 0$ momentumú függvényeket vesszük figyelembe,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_i^{l+1}} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\theta_i, \phi_i) \xrightarrow{l=0} 4\pi \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_i}$$

így a mátrixelem nagymértékben leegyszerűsödik:

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{e}{\sqrt{(V\pi a^3)}} \sum_{i=1}^Z \int dR \psi_b^*(R) \frac{1}{r_i} \psi_a(R) \int_{r < r_i} d^3 r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{\frac{r}{a}},$$

ahol $r < R$ (R a nukleonok helyvektorait jelöli). Vegyük észre, hogy az r elektron helyvektor nagyon kis abszolút értékű és szűk tartományon változik a magon belül, ezért jó közelítéssel sorbafejthetjük az exponenciális függvényeket, amelyeket elég első rendben megtartani. Ezzel az r szerinti integrál közelítőleg

$$\int_{r < r_i} d^3 r \approx \frac{4\pi}{3} r_i^3,$$

amit visszahelyettesítve a mátrixelembe

$$\langle b | \mathbf{H}' | a \rangle = \frac{4\pi}{3} \frac{e}{\sqrt{(V\pi a^3)}} \sum_{i=1}^Z \int dR \psi_b^*(R) r_i^2 \psi_a(R) = \frac{4\pi}{3} \frac{e}{\sqrt{(V\pi a^3)}} \bar{R}^2,$$

képletet kapjuk. A maradék integrálok összegét jelöljük \bar{R}^2 -el, amely nagyságrendje érezhetően a magsugar nagyságrendjébe esik. A mátrixelemet visszahelyettesítve az aranszabályba a következő (nem nulla!!) átmeneti valószínűséget kapjuk:

$$T_{ab}^{0 \rightarrow 0} = \frac{32}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} Z^3 \left(\frac{\bar{R}^2}{a_0^2} \right)^2 \left(\frac{2}{2m} \frac{\hbar^2 k^2}{mc^2} \right)^{1/2}.$$

A fenti kifejezésben az \bar{R}^2 (így az átmenet) akkor ad nem nulla eredményt, ha a kezdeti és a végállapot paritása azonos. Tehát a $0 \rightarrow 0$ átmenetben a paritás nem változik meg!

1.3.5. A γ -bomlás általános leírása, általános (multipól) átmenetek

A foton emisszió és abszorpció általános tárgyalás a sugárzás kvantumelméletén alapszik. A leírásnál kvázi-klasszikus képet használunk, azaz az emittált fotont klasszikus térként kezeljük, ez mindaddig megtehető, míg a sugárzás forrásának mérettartománya a kibocsátott foton hullámhosszánál kisebb tartományba esik. Ez a klasszikus gamma-bomlás esetében ($E < 10$ MeV) jól használható módszer. Mivel a bomlást kívánjuk leírni, ezért csak az emisszióra koncentrálnak.

Az emisszió általános osztályozása legegyszerűbben az \mathbf{L} impulzusmomentumon és paritáson keresztül valósítható meg. A sugárzások esetében úgy, mint a részecskékénél, az impulzusmomentum jól definiált kvantumszámokon keresztül jellemzi a kvantumrendszert. A paritás a gyenge kölcsönhatás kivételével megmaradó mennyiség a bomlási folyamatokban, ezért az is alkalmas a sugárzás jellemzésére. Az l (az \mathbf{L}^2 operátor sajátértéke: $l(l+1)$) kvantumszám értékeitől függően a fotonok két különböző hullámmal írhatóak le, ez alapján megkülönböztetjük az „elektromos” és a „mágneses” sugárzást. A sugárzások így történő leírásának egyik alapfeltétele, hogy a sugárzásra úgy tekintünk, mint az origóhoz közeli áram- (töltés-) eloszlásból kimenő gömbhullámok rendszerére. Ez a tárgyalást teszi lehetővé a multipól-sorfejtés.

A multipólusok elméletének kidolgozásához első lépésben vizsgáljuk meg a szabad, forrásmentes elektromos (\mathbf{E}) és mágneses (\mathbf{H}) mezők multipól-sorfejtését. Ehhez vegyünk harmonikusan időfüggő tereket:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

ezekkel a terekkel a forrásmentes Maxwell-egyenletek szimmetrikus alakot öltenek:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = ikZ_0 \mathbf{H}; \\ \nabla \mathbf{E} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{i}{Z_0} k\mathbf{E}; \\ \nabla \mathbf{H} = 0; \end{cases}$$

ahol $k = \frac{\omega}{c}$ az elektromágneses hullám hullámszáma, és $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. A fenti

egyenletrendszert két ekvivalens formára hozhatjuk a rotációs egyenletek egymásba helyettesítésével:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\mathbf{H} = 0; \\ \nabla\mathbf{H} = 0; \\ \mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k}\nabla\times\mathbf{H}; \end{cases} \begin{cases} (\Delta + k^2)\mathbf{E} = 0; \\ \nabla\mathbf{E} = 0; \\ \mathbf{H} = -\frac{i}{kZ_0}\nabla\times\mathbf{E}; \end{cases}$$

A fenti egyenletrendszerek azért praktikusak, mert vagy az \mathbf{E} vagy a \mathbf{H} mező a peremfeltételek alapján egyértelműen meghatározható, és ez automatikusan determinálja a másik mezőt. A megjelenő Helmholtz-egyenleteket úgy kell értelmezni (mivel ez egy skaláregyenlet), hogy a két vektormező minden komponensének külön ki kell elégítenie az egyenletet. Ez a tulajdonság az, amely lehetővé teszi az elektromágneses tér gömbfüggvények szerinti kifejtését. Tudjuk, hogy ha egy $\Psi(\mathbf{r})$ függvény kielégíti a Helmholtz-egyenletet, akkor az kifejthető a szögfüggő Laplace-operátor sajátfüggvényei (Y_{lm} gömbfüggvények) szerint:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} (A_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} g_{lm}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

ahol $A_{lm}^{(1)}$ és $A_{lm}^{(2)}$ együtthatókat a peremfeltételek rögzítik, $h_l^{1,2}$ a szférikus Hankel-függvények (lineárisan független megoldásai a gömbi Laplace-operátor radiális részének:

$h_l^{1,2}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}(j_l(x) \pm in(x))$). Mielőtt elvégeznénk a mezők sorfejtését, alkalmazzunk egy egyszerűsítő eljárást (Bouwkamp és Casimir nyomán). Vegyük a következő skalármennyiséget (\mathbf{rA}), ahol \mathbf{A} egy jól viselkedő vektormező, \mathbf{r} a helyvektor, ekkor igaz a következő azonosság:

$$\Delta(\mathbf{rA}) = \mathbf{r}\Delta\mathbf{A} + 2\nabla\mathbf{A}.$$

Mivel mi olyan tereket vizsgálunk, melyek „jól viselkednek”, ezért a fenti képletbe az \mathbf{A} helyére az \mathbf{E} és a \mathbf{H} mezőket írhatjuk, azaz

$$\Delta(\mathbf{rE}) = \mathbf{r}\Delta\mathbf{E} \quad \Delta(\mathbf{rH}) = \mathbf{r}\Delta\mathbf{H};$$

itt természetesen kihasználtuk, hogy a forrásmentes esetben az elektromágneses mezők divergencia-mentesek. Amennyiben a Helmholtz-egyenletet balról beszorozzuk az \mathbf{r} helyvektorral és kihasználjuk a fenti azonosságot azt kapjuk, hogy a Helmholtz-egyenletet az \mathbf{rH} és az \mathbf{rE} skalármennyiségek is kielégítik:

$$(\Delta + k^2)(\mathbf{rE}) = 0; \quad (\Delta + k^2)(\mathbf{rH}) = 0;$$

a fentiek alapján a speciálisan választott skalármennyiségek szintén sorbafejthetők a gömbfüggvények szerint. Ez praktikusán kétféleképpen tehetjük meg, aszerint, hogy az elektromos vagy a mágneses teret választjuk transzverzális modusnak (azaz merőlegesnek a rádiusvektorral). Először definiáljuk az (l,m) rendű transzverzális elektromos (TE) multipóleret:

$$\begin{aligned} \mathbf{rH}_{lm}^{(M)} &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} g_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \\ \mathbf{rE}_{lm}^{(M)} &= 0; \end{aligned}$$

ahol a mágneses tér kifejtésében az $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}$ pusztán kényelmi célokat szolgál, az elektromos térre vonatkozó egyenlet a transzverzális tér következménye. Ha kihasználjuk a rotációs Maxwell-egyenletet, akkor kapcsolatot teremthetünk az \mathbf{rH} és az \mathbf{E} között:

$$Z_0 k \mathbf{rH} = \frac{1}{i} \mathbf{r}(\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \nabla) \mathbf{E} = \mathbf{L} \mathbf{E}.$$

A kapott összefüggést és a multipólterek definícióját felhasználva megkapjuk a mágneses multipólus elektromos terét:

$$\mathbf{L} \mathbf{E}_{lm}^{(M)} = \sqrt{l(l+1)} g_l(kr) Z_0 Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

a kifejezés jobb oldalán pontosan az L^2 operátor sajátértéke és sajátfüggvény szerepel, hiszen $L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$, az egyenlőség teljesülése érdekében a baloldalon lévő mennyiségnek a sajátérték-egyenlet bal oldalával azonos szerkezetűnek kell lennie. Ebből következik, hogy az elektromos térnek

$$\mathbf{E}_{lm}^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} Z_0 \mathbf{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) g_l(kr)$$

alakúnak kell lennie. Ez a választás jó, mert teljesíti a transzverzális feltételt, hiszen $\mathbf{rL} = \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \nabla) = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \nabla = \mathbf{0}$. A rotációs Maxwell-egyenlet alapján az elektromos tér meghatározza a mágneses teret:

$$\mathbf{H}_{lm}^{(M)} = -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^{(M)}.$$

Ezzel meghatároztuk a mágneses multipólus terét, vagy más néven a transzverzális elektromos tereket (TE).

A másik lehetőségünk, hogy a mágneses teret választjuk transzverzálisnak: definiáljuk az (l, m) rendű transzverzális mágneses tereket (TM):

$$\begin{aligned} \mathbf{rE}_{lm}^{(E)} &= -Z_0 \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} f_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \\ \mathbf{rH}_{lm}^{(E)} &= 0; \end{aligned}$$

ahol az f_l függvények azonos szerkezetűek a g_l függvényekkel. A (TE) esettel analóg módon, a rotációs egyenlet alapján meghatározható az elektromos és a mágneses multipóltér:

$$\mathbf{H}_{lm}^{(E)} = \mathbf{L}Y_{lm}(\vartheta, \varphi)f_l(kr),$$

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}_{lm}^{(E)}.$$

Végeredményben láthatjuk, hogy sikerült az elektromágneses teret, mint *mágneses*, ill. *elektromos multipóltereket* felírunk. Vegyük észre, hogy ezek a Helmholtz-egyenlet független (ortogonális) megoldásai, ezért a teljes megoldás ezek egy szuperpozíciója lesz. Mielőtt ezt felíránk, tegyünk egy kis kitérőt. A terek kifejtésében mindkét esetben megjelenik az $\mathbf{L}Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ kifejezés, ezért ezt érdemes alaposabban megvizsgálni.

Vezessük be a *vektoriális gömbfüggvényeket* a következőképpen:

$$\mathbf{X}_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L}Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Könnyen beláthatjuk, hogy az így definiált függvények ortonormált rendszert alkotnak:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{X}_{lm}^* \mathbf{X}_{l'm'} d\Omega &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{l'(l'+1)}} \int Y_{lm}^* \mathbf{L}^2 Y_{l'm'} d\Omega = \frac{l'(l'+1)}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{l'(l'+1)}} \int Y_{lm}^* Y_{l'm'} d\Omega = \\ &= \frac{l'(l'+1)}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{l'(l'+1)}} \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

A rádiuszvektor és az impulzusmomentum ortogonalitásából következik, hogy

$$\int \mathbf{X}_{lm}^* (\mathbf{r} \times \mathbf{X}_{lm}) d\Omega = 0.$$

A vektoriális gömbfüggvényekkel könnyen felírhatjuk a Helmholtz-egyenletek teljes megoldását a multipólterek szuperpozícióiként:

$$\mathbf{H}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} \left[a_E(lm) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} a_M(lm) \nabla \times g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right],$$

$$\mathbf{E}(r, \vartheta, \varphi) = Z_0 \sum_{lm} \left[\frac{i}{k} a_E(lm) \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + a_M(lm) g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right].$$

A kifejezésekben megjelenő $a_E(lm)$ és $a_M(lm)$ együtthatók a multipólterek mennyiségét mérik, ebből következően a terek forrásai határozzák meg őket. A fenti kifejezések egyben meghatározzák az említett együtthatókat, azonban ehhez el kell végeznünk egy ekvivalens átalakítást:

$$a_M(lm) g_l(kr) = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \mathbf{r} \mathbf{H} d\Omega,$$

$$a_E(lm) f_l(kr) = -\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \mathbf{r} \mathbf{E} d\Omega.$$

A kifejezések helyességéről könnyen megbizonyosodhatunk, ha kiértékeljük az integrandust:

$$Y_{lm}^* \mathbf{rH} = \sum_{lm} \left[a_E(lm) f_l(kr) Y_{lm}^* \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{rL} Y_{lm} - \frac{i}{k} a_m(lm) Y_{lm}^* \mathbf{r} \nabla \times g_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right],$$

ahol a jobboldali összeg első tagja nulla, mivel az $\mathbf{rL}=0$, a maradék tagot kifejtve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} Y_{lm}^* \mathbf{rH} &= \sum_{lm} \left[-\frac{i}{k} a_m(lm) Y_{lm}^* \mathbf{r} \nabla \times g_l(kr) \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm} \right] = \sum_{lm} \left[-\frac{i}{k} a_m(lm) Y_{lm}^* (\mathbf{r} \times \nabla) g_l(kr) \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm} \right] = \\ &= \sum_{lm} \left[\frac{1}{k} a_m(lm) Y_{lm}^* g_l(kr) \frac{\mathbf{L}^2}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{lm} \right] = \sum_{lm} \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} a_m(lm) g_l(kr) Y_{lm}^* Y_{lm} \right]. \end{aligned}$$

amelyet, ha integrálunk a teljes térszög szerint, pontosan a keresett összefüggést kapjuk. Az elektromos multipól-együtthatóra vonatkozó képlet ezzel analóg módon bizonyítható. A következőkben a multipóterek forrásaival foglalkozunk, azaz meghatározzuk a multipól-együtthatók és a források kapcsolatát. Ehhez tekintsünk jól viselkedő, harmonikus időfüggésű töltés- és áramsűrűségeket:

$$\rho(r, t) = \rho(r) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(r, t) = \mathbf{j}(r) e^{-i\omega t},$$

melyek mágnesezettsége:

$$\mathbf{M}(r, t) = \mathbf{M}(r) e^{-i\omega t}.$$

Ekkor az elektromágneses teret leíró forrásos Maxwell-egyenletek:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{H}' &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} - ikZ_0 \mathbf{H}' &= 0 \\ \nabla \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \times \mathbf{H} + \frac{i}{Z_0} k \mathbf{E} &= \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} \end{aligned}$$

ezekhez még a töltésmegmaradást leíró kontinuitási egyenlet adódik, mely a források között teremt kapcsolatot:

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Az egyszerűség kedvéért vezessünk be divergencia-mentes elektromos teret: $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \mathbf{j}$, ezzel a választással a Maxwell-egyenletek divergencia-mentes alakban fogalmazhatók meg:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{H}' &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}' - ikZ_0 \mathbf{H}' &= \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{j} \\ \nabla \mathbf{E}' &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}' + \frac{i}{Z_0} k \mathbf{E}' &= \nabla \times \mathbf{M}\end{aligned}$$

A továbbiakban ezekkel az új egyenletekkel dolgozunk tovább. Mint emlékszünk a forrásmentes terek multipól-sorfejtésénél a Helmholtz-egyenletet használtuk ki, ezért ezt az utat kell követnünk a források esetében is. A rotációs egyenleteket felhasználva az elektromos és mágneses terek kifejezhetők egymásból, így két ekvivalens egyenletrendszerrel kapunk, melyben megjelennek az immáron inhomogén Helmholtz-egyenletek:

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2) \mathbf{H}' &= -\nabla \times (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}), \\ \nabla \mathbf{H}' &= 0, \\ ik \mathbf{E}' &= \nabla \times (\mathbf{M} - \mathbf{H}'),\end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2) \mathbf{E}' &= -ikZ_0 \nabla \times \left(\mathbf{M} + \frac{1}{k^2} \nabla \times \mathbf{j} \right), \\ \nabla \mathbf{E}' &= 0, \\ ik \mathbf{H}' &= \nabla \times \left(\frac{i}{\omega \varepsilon_0} \mathbf{j} + \mathbf{E}' \right).\end{aligned}$$

A forrásos egyenletek vizsgálatával az a célunk, hogy a terek kifejtésében szereplő multipól-együtthatókat a forrásokkal fejezzük ki. Emlékezzünk, hogy az együtthatókat megadó képletben az \mathbf{rH} ill. \mathbf{rE} skalármennyiségek szerepelnek, ezért a fenti forrásos hullámegyenletet elegendő ezekre a mennyiségekre vizsgálni. Ha kihasználjuk, hogy egy általános \mathbf{A} vektormezőre igaz az

$$\mathbf{r}(\nabla \times \mathbf{A}) = (\mathbf{r} \times \nabla) \mathbf{A} = i\mathbf{L} \mathbf{A}$$

összefüggés. Az szabad mezőknél alkalmazott módszerrel és a fenti bemutatott azonossággal a forrásos Helmholtz-egyenletek az \mathbf{rH}' és \mathbf{rE}' skalárookra is érvényes lesz:

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2) \mathbf{rH}' &= -i\mathbf{L}(\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}), \\ (\Delta + k^2) \mathbf{rE}' &= Z_0 k \mathbf{L} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{k^2} \nabla \times \mathbf{j} \right).\end{aligned}$$

A forrásos másodrendű differenciálegyenletek általános megoldása a Green-függvény technika módszerrel könnyen meghatározható, gömbszimmetrikus rendszerre a Helmholtz-egyenlet Green-függvénye:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

mellyel a keresett általános megoldások:

$$\begin{aligned} \mathbf{rH}' &= \frac{i}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{L}' [\mathbf{j}(\mathbf{x}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')] d^3 x'; \\ \mathbf{rE}' &= -\frac{Z_0 k}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{L}' \left[\mathbf{M}(\mathbf{x}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right] d^3 x'. \end{aligned}$$

A megoldás csak akkor igaz, ha az egyenlet peremfeltétele a végtelenben „visszaverődő” hullám eltűnése. Az alkalmazott peremfeltétel következménye, hogy az általános gömbhullámok szerinti sorfejtésben megjelenő A_l^2 együttható értéke nulla kell, hogy legyen, és a forráson kívül $g_l(kr) = f_l(kr) = h_l^1(kr)$ szférikus Hankel-függvény jelenik meg. Mielőtt a keresett multipól-együtthatókat kifejeznénk a forrással szükségünk van a Green-függvények gömbfüggvényekkel történő kifejtésére:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr') h_l^1(kr) \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Tegyük fel, hogy az \mathbf{x} vektorral jellemzett pont a forrásokat teljesen körvevő gömbfelületen kívül helyezkedik el. Ekkor az $a_M(lm)$ és $a_E(lm)$ együtthatókhoz szükséges gömbhullám-vetület (felhasználva a fenti kifejtést):

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} Y_{lm}^* d\Omega = ik j_l(kr') h_l^1(kr) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi').$$

Most alkalmazzuk a multipól-együtthatókra kapott összefüggést, és helyettesítsük be a már meglévő függvényeket:

$$\begin{aligned} a_M(lm) h_l^1(kr) &= \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \mathbf{rH}' d\Omega = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \frac{i}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{L}' [\mathbf{j}(\mathbf{x}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')] d^3 x' d\Omega = \\ &= -\frac{k^2}{\sqrt{l(l+1)}} h_l^1(kr) \int Y_{lm}^*(\Omega) j_l(kr') \mathbf{L}' [\mathbf{j}(\mathbf{x}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')] d^3 x', \end{aligned}$$

ahol vegyük észre, hogy a szférikus Hankel-függvény megjelent a kifejezés jobboldalán is, így azzal egyszerűsíteni lehet. Ha elhagyjuk a vesszőt az integrálási változóról, akkor megkapjuk a forrásokkal kifejezett multipól-együtthatókat:

$$a_M(lm) = -\frac{k^2}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \mathbf{L}' [\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x})] d^3 x,$$

ill. hasonló gondolatmenettel az elektromos multipól-együttható:

$$a_E(lm) = \frac{ik^3}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \mathbf{L} \left[\mathbf{M}(\mathbf{x}) + \frac{1}{k^2} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right] d^3x.$$

Amit végeredménybe kaptunk, nem más, mint az egyes multipólterek forráson kívüli tartománybeli erősségét a \mathbf{j} és \mathbf{M} forrásereők integráljaként. A kapott összefüggések némi átalakítással egyszerűbb alakúra hozhatóak. Első lépésként vegyük egy \mathbf{A} vektormezőre vonatkozó két azonosságot:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{A} &= i\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{A}), \\ \mathbf{L}(\nabla \times \mathbf{A}) &= i\Delta(\mathbf{r}\mathbf{A}) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \nabla \mathbf{A}), \end{aligned}$$

Az \mathbf{L} impulzusmomentum definícióját és a fenti azonosságokat felhasználva az elektromos multipól-együtthatót könnyen átalakíthatjuk:

$$a_E(lm) = -\frac{k^3}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \left[\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{k^2} \Delta(\mathbf{r}\mathbf{j}) - \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \nabla \mathbf{j}) \right] d^3r,$$

a zárójelben lévő harmadik tagban megjelenik az áramsűrűség divergenciája, amit a kontinuitási-egyenlettel eliminálhatunk:

$$a_E(lm) = -\frac{k^3}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \left[\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{k^2} \Delta(\mathbf{r}\mathbf{j}) - \frac{ic}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho) \right] d^3r,$$

mint tudjuk az elemi térfogatelem $d^3r = drd\Omega$, ez alapján a zárójelben lévő harmadik tag rádiusz szerinti parciális deriváltja áthárítható a szférikus Bessel-függvényre, ezt a rádiusz szerinti parciális integrálással könnyen véghezvihetjük:

$$\begin{aligned} -\int j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \frac{ic}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho) drd\Omega &= -\int \frac{\partial}{\partial r} \left(j_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega) \frac{ic}{k} r \rho \right) drd\Omega + \\ &+ \int Y_{lm}^*(\Omega) \frac{ic}{k} \rho \frac{\partial}{\partial r} (r j_l(kr)) drd\Omega, \end{aligned}$$

ahol a jobboldal első tagja a rádiusz szerinti teljes differenciál miatt nulla lesz (a végtelenben felvett értéke a függvénynek nulla!, kompakt függvények). A második tagban lévő Laplace-operátor helyére $-k^2$ írható (Green-tétel?), ezekkel az ekvivalens átalakításokkal a következőt kapjuk az elektromos multipól-együtthatóra:

$$a_E(lm) = \frac{k^2}{i\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^*(\Omega) \left[c\rho \frac{\partial}{\partial r} (r j_l(kr)) + ik(\mathbf{r}\mathbf{j}) j_l(kr) - ik\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{M}) j_l(kr) \right] drd\Omega,$$

valamint ezzel azonos gondolatmenettel átalakítható a mágneses multipól-együttható:

$$a_M(lm) = \frac{k^2}{i\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^*(\Omega) \left[\nabla \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial r} (r j_l(kr)) - k^2 (\mathbf{r} \mathbf{M}) j_l(kr) + \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) j_l(kr) \right] dr d\Omega.$$

A fenti képletek a multipól-együtthatók egzakt kifejezései, általános érvényesek tetszőleges töltés- és áramsűrűség eloszlásokra!

A magfizikában előforduló elektromágneses sugárzás, azaz gamma-bomlás, olyan speciális multipól-sugárzás, ahol a kisugárzott foton hullámhossza jóval kisebb, mint a forrás mérete ($kr \ll 1$). Ebben az esetben a multipól-együtthatókat megadó formulákban a $j_l(kr)$ szférikus Bessel-függvények a következő Taylor-sorral fejezhetők ki:

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right), \text{ ahol } x \ll 1.$$

A fenti sorfejtést alkalmazva a forrást tartalmazó tagokban, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] &\approx c\rho \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k^l r^{l+1}}{(2l+1)!!} \right] = c\rho \frac{k^l r^l}{(2l+1)!!} (l+1); \\ -ik \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) j_l(kr) &\approx -ik \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) \frac{k^l r^l}{(2l+1)!!}, \end{aligned}$$

a közelített komponenseket a kr legalacsonyabb rendjében megtartva a következő összefüggést kapjuk:

$$a_E(lm) \approx \frac{ck^{l+2}}{i(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (Q_{lm} + Q'_{lm}),$$

ahol

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int r^l Y_{lm}^* \rho d^3 r, \\ Q'_{lm} &= -\frac{ik}{(l+1)c} \int r^l Y_{lm}^* \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) d^3 r. \end{aligned}$$

A Q_{lm} töltéssűrűségből, míg a Q'_{lm} a mágnesezettségtől eredő elektromos multipól-nyomaték. A fentiekben tárgyalt közelítések és átalakítások révén a $kr \ll 1$ speciális esetben érvényes mágneses multipól-együttható:

$$a_M(lm) \approx \frac{ik^{l+2}}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (M_{lm} + M'_{lm}),$$

Ahol

$$\begin{aligned} M_{lm} &= -\frac{1}{l+1} \int r^l Y_{lm}^* \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) d^3 r, \\ M'_{lm} &= -\int r^l Y_{lm}^* \nabla \mathbf{M} d^3 r. \end{aligned}$$

Az M_{lm} az áramsűrűségből, míg az M'_{lm} a mágnesezettségből eredő mágneses multipól-nyomaték.

1.3.5.1. Multipól-sugárzás teljesítménye, átmeneti valószínűség

Az előző alfejezetben részletesen tárgyaltuk, hogy az elektromágneses sugárzást miként lehet felírni multipólusok által kisugárzott multipól-sugárzásként. Meghatároztuk a multipólterek erősségét meghatározó multipól-együtthatókat, ill. az ezek forrásoktól való függését megadó multipól-nyomatékokat, ezzel összekapcsolva a tereket a forrásokkal. A következőkben a multipól-sugárzás kisugárzott teljesítményét határozzuk, ugyanis ezzel lehetőségünk nyílik, a gamma-bomlás kvantummechanikai leírására.

Az elektromágneses tér teljesítmény-fluxusát a Poynting-vektor írja le, mely a harmonikusan időfüggő mezők esetében definíció szerint:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*,$$

ahol a mezőket a Helmholtz-egyenlet általános megoldása adja. Az egyszerűség kedvéért először vizsgáljunk egy tisztán (lm) rendű elektromos multipólust. Ekkor a tereket megadó összefüggések a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{lm}^{(E)} &= \mathbf{L}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) f_l(kr), \\ \mathbf{E}_{lm}^{(E)} &= \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H}_{lm}^{(E)}. \end{aligned}$$

Mivel magfizikai folyamatot szeretnénk leírni, ezért a $kr \gg 1$ határesetben dolgozunk, amely megfelel a forrástól távoli hullámzóna vizsgálatának. A végtelenben kimenő hullámnak megfelelően $f_l(kr) = h_l^1(kr)$, amely a hullámzóna közelítésben

$$h_l^1(kr) \approx \frac{(-i)^{l+1}}{kr} e^{ikr}.$$

A fenti közelítés mellett a mezőket a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{lm}^{(E)} &= (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{L}Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \\ \mathbf{E}_{lm}^{(E)} &= (-i)^l \frac{Z_0}{k^2} \left[\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{L}Y_{lm} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \mathbf{L}Y_{lm} \right]. \end{aligned}$$

A további számítások előtt egy fontos megjegyzést kell tennünk, az előforduló közelítésekben és egzakt eredményekben a hullámzóna közelítés miatt csak az (l/r) -ben elsőrendű tagokat tartjuk meg. Ennek tükrében az elektromos teret megadó képletben elvégezhetjük a kijelölt műveleteket:

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} = -Z_0 (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{L} Y_{lm} - \frac{1}{k} (\mathbf{r} \Delta - \nabla) Y_{lm} \right],$$

ahol felhasználtuk a következő operátorazonosságot:

$$i(\nabla \times \mathbf{L}) = \mathbf{r} \Delta - \nabla \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

valamint azt, hogy az Y_{lm} gömbfüggvények függetlenek az r változótól, és $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ sugárirányú egységvektor. A zárójelben szereplő két tag közül a másodikban az $(1/kr)$ gömbfüggvényekkel vett szorzata szerepel, mely az első taghoz képest elhanyagolható, ezért az elektromos multipóltér:

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} = -Z_0 (-1)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{n} \times \mathbf{L} Y_{lm} = Z_0 \mathbf{H}_{lm}^{(E)} \times \mathbf{n},$$

ahol felhasználtuk a mágneses multipóltér definícióját és a vektorszorzás anti-kommutatív tulajdonságát. Most, hogy az elektromos multipólterek hullámzónabeli alakját meghatároztuk felírhatjuk a forrásból kiáramló teljesítménysűrűséget. Ehhez vegyünk a forrás körül egy R sugarú gömböt, mely mérete a forrástól távoli hullámzónában van, ezen gömbfelület egy infinitezimális $d\Omega$ térszögbe kisugárzott teljesítményt az

SdA

skalárszorzat adja meg. A megjelenő Poynting-vektor a fent meghatározott mezőkkel kifejezve

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{lm} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_{lm}^{(E)} \times \mathbf{H}_{lm}^{(E)*} = \frac{1}{2} (Z_0 \mathbf{H}_{lm}^{(E)} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{H}_{lm}^{(E)*} = -\frac{Z_0}{2} \mathbf{H}_{lm}^{(E)*} \times (\mathbf{H}_{lm}^{(E)} \times \mathbf{n}) = \\ &= -\frac{Z_0}{2} [(\mathbf{H}_{lm}^{(E)} \mathbf{n}) \mathbf{H}_{lm}^{(E)*} - (\mathbf{H}_{lm}^{(E)*} \mathbf{H}_{lm}^{(E)}) \mathbf{n}] \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a következő vektorazonosságot

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

A zárójelben szereplő első skalárszorzat értéke transzverzális mágneses multipóltér miatt nulla, hiszen $\mathbf{H} \mathbf{r} = 0$, és \mathbf{n} sugárirányú egységvektor. Ezzel a Poynting-vektor

$$\mathbf{S}_{lm} = \frac{Z_0}{2} (\mathbf{H}_{lm}^{(E)*} \mathbf{H}_{lm}^{(E)}) \mathbf{n} = \frac{Z_0}{2} (\mathbf{H}_{lm}^{(E)})^2 \mathbf{n},$$

amely egy sugárirányú vektort ad. Ennek következménye, hogy az infinitezimális gömbfelület áthaladó teljesítmény kiszámításánál elegendő az abszolút értékekkel számolni:

$$\mathbf{S}_{lm} d\mathbf{A} = S_{lm} dA = \frac{Z_0}{2} (\mathbf{H}_{lm}^{(E)})^2 R^2 d\Omega = U_{lm}(\Omega) d\Omega.$$

A fenti kifejezés kiszámításához fel kell írunk a multipóltereket, mint a multipól-együtthatókkal kifejezett általános megoldása a Helmholtz-egyenletnek, azaz:

$$\mathbf{H}_{lm}^{(E)} = (-1)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} a_E(lm) \mathbf{X}_{lm} \Rightarrow |\mathbf{H}_{lm}^{(E)}|^2 = \frac{1}{(kr)^2} |a_E(lm)|^2 |\mathbf{X}_{lm}|^2.$$

A kapott képletet visszahelyettesítve a felületegységen kiáramló teljesítmény összefüggésébe megkapjuk a multipóltér teljesítménysugárzás szögeloszlását:

$$U_{lm}^{(E)}(\Omega) = \frac{Z_0}{2k^2} |a_E(lm)|^2 \mathbf{X}_{lm}^* \mathbf{X}_{lm}.$$

ahol a vektoriális gömbfüggvények szorzata némi ekvivalens átalakítást alkalmazva könnyen kiszámítható:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm}^* \mathbf{X}_{lm} &= Y_{lm}^* \mathbf{L}^* \mathbf{L} Y_{lm} = Y_{lm}^* \left[\frac{1}{2} L_+ L_- + \frac{1}{2} L_- L_+ + L_z^2 \right] Y_{lm} = \frac{1}{2} [l(l+1) - m(m-1)] |Y_{l,m-1}|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} [l(l+1) - m(m+1)] |Y_{l,m+1}|^2 + m^2 |Y_{l,m}|^2. \end{aligned}$$

A fenti számításoknál kihasználtuk a léptető-operátorok hatását a \mathbf{L}^2 és L_z operátorok sajátfüggvényeire. Ezzel vegyük észre, hogy meghatároztuk a kisugárzott teljesítmény szögeloszlását, mely azonos lesz a tisztán mágneses multipólus esetében is, a különbség, hogy ott a mágneses multipól-együttható négyzete jelenik meg:

$$U_{lm}^{(M)}(\Omega) = \frac{Z_0}{2k^2} |a_M(lm)|^2 \mathbf{X}_{lm}^* \mathbf{X}_{lm}.$$

A bomlási folyamatok szempontjából, minket a teljes kisugárzott teljesítmény érdekel. Ehhez a fenti függvényt integrálnunk kell a teljes térszög szerint. Ez könnyedén elvégezhető, hiszen a teljesítmény-eloszlásban csak vektoriális gömbfüggvények függenek a szögváltozóktól,

Ezek ismeretében a forrást körülölelő gömb felületen az (lm) rendű elektromos multipólus által kisugárzott összteljesítmény:

$$P_{lm}^E = \int U(\Omega) d\Omega = \frac{Z_0}{2k^2} |a_E(lm)|^2,$$

ill. hasonló gondolatmenettel az (lm) rendű mágneses multipólus esetében a kisugárzott összteljesítmény

$$P_{lm}^M = \int U(\Omega) d\Omega = \frac{Z_0}{2k^2} |a_M(lm)|^2.$$

Vegyük észre, hogy a fenti formulákban csak a kisugárzott foton és a forrás paramétereire szerepelnek!

A kvantummechanikai átmenet leírásához le kell szögeznünk a következőket: egyrészt a sugárzás nem folytonos, hanem $\hbar\omega$ kvantumokban történik, másrészt a források jelen esetben kvantummechanikai rendszerként viselkednek. Az első megállapítás alapján a bomlási valószínűségről a következőt mondhatjuk el: annak a valószínűsége, hogy az adott multipól-forrás egy $\hbar\omega$ energiájú fotont emittáljon másodpercenként azonos a kisugárzott teljesítmény és a foton energiájának hányadosával:

$$\begin{aligned} T_{lm}^E &= \frac{P_{lm}^E}{\hbar\omega} = \frac{Z_0}{2k^2\hbar\omega} |a_E(lm)|^2 = \frac{Z_0}{2k^2\hbar\omega} \frac{c^2 k^{2l+4}}{[(2l+1)!]^2} \frac{l+1}{l} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2 = \\ &= \frac{Z_0\omega}{2\hbar} \frac{k^{2l}}{[(2l+1)!]^2} \frac{l+1}{l} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2. \end{aligned}$$

A fenti kifejezés SI mértékegység-rendszerben, a magfizikában általában a CGS rendszert használják, mivel ekkor a képletekben nem jelennek meg az ε és μ paraméterek. Ha át akarunk térni az CGS-ben kifejezett mennyiségekre, akkor a

$$Z_0 = \frac{4\pi}{c}$$

helyettesítést kell alkalmazni. Az ismertetett módon a mágneses multipólus által kisugárzott teljesítményt is meg lehet határozni:

$$\begin{aligned} T_{lm}^M &= \frac{P_{lm}^M}{\hbar\omega} = \frac{Z_0}{2k^2\hbar\omega} |a_M(lm)|^2 = \frac{Z_0}{2k^2\hbar\omega} \frac{k^{2l+4}}{[(2l+1)!]^2} \frac{l+1}{l} |M_{lm} + M'_{lm}|^2 = \\ &= \frac{Z_0}{2\hbar\omega} \frac{k^{2l+2}}{[(2l+1)!]^2} \frac{l+1}{l} |M_{lm} + M'_{lm}|^2. \end{aligned}$$

A kapott átmeneti valószínűségek kiszámításánál eddig csak a kisugárzott energia kvantáltságát használtuk ki, a források kvantummechanikai értelmezését még nem. Mint emlékeztetünk rá, a források a Q_{lm} és M_{lm} multipól-nyomatékokban jelennek meg. Kvantummechanikai rendszerről lévén szó a töltéssűrűséget és az áramsűrűséget a rendszer állapotfüggvényein keresztül kell értelmeznünk. Jelölje a sugárzás előtti magállapotot a φ_a , a foton emisszió utáni végállapotot a φ_b . Ekkor a töltéssűrűség

$$\rho_{ab}(\mathbf{r}) = e\varphi_b^*(\mathbf{r})\varphi_a(\mathbf{r}),$$

a hozzá tartozó áramsűrűség

$$\mathbf{j}_{ab}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2m} \left[\varphi_b^*(\mathbf{p}\varphi_a) + (\mathbf{p}\varphi_b)^* \varphi_a \right]$$

ahol \mathbf{p} a szokásos impulzusoperátor. A kvantummechanikai rendszerre vonatkozó multiól-nyomatékokat a fenti definíciókkal könnyedén felírhatjuk:

$$Q_{lm}(a,b) = e \int r^l Y_{lm}^* \varphi_b^* \varphi_a d^3r,$$

$$M_{lm}(a,b) = -\frac{1}{l+1} \frac{e\hbar}{2mi} \int r^l Y_{lm}^* \nabla(\mathbf{r} \times [\varphi_b^* (\nabla \varphi_a) - \varphi_a (\nabla \varphi_b^*)]) d^3r.$$

Az utóbbi zárójelben lévő második tagot a szorzat deriváltjával helyettesítve a következőt kapjuk:

$$M_{lm}(a,b) = -\frac{1}{l+1} \frac{e\hbar}{2mi} \int r^l Y_{lm}^* \nabla(\mathbf{r} \times [2\varphi_b^* (\nabla \varphi_a) - \nabla(\varphi_b^* \varphi_a)]) d^3r =$$

$$= -\frac{1}{l+1} \frac{e\hbar}{2m} \int r^l Y_{lm}^* \nabla([2\varphi_b^* (\mathbf{L} \varphi_a) - \mathbf{L}(\varphi_b^* \varphi_a)]) d^3r,$$

ha kihasználtuk a következő operátorazonosságot: $\nabla(\mathbf{r} \times \nabla) = 0$ a zárójel második tagja eltűnik és a mágneses multipól-nyomatékokra egy egyszerű összefüggést kapunk:

$$M_{lm}(a,b) = -\frac{1}{l+1} \frac{e\hbar}{m} \int r^l Y_{lm}^* \nabla([\varphi_b^* \mathbf{L} \varphi_a]) d^3r.$$

A mágnesezettséget tartalmazó multipól-nyomatékok meghatározásához szükség van a mágnesezettség-sűrűség kvantummechanikai értelmezésére. A mágnesezettségen keresztül megvalósuló sugárzási átmenet a és b állapotok között a spin operátorával és a μ mágneses momentummal a megszokott módon

$$\mathbf{M}(a,b) = \frac{e\hbar}{2M} \mu \{ \varphi_b^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_a \},$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}$ a Pauli-mátrixok. Ezzel könnyen megadható a mágnesezettség következtében megvalósuló elektromos és mágneses multipól-átmenet:

$$Q'_{lm}(a,b) = -\frac{ik}{(l+1)c} \frac{e\hbar}{2m} \int r^l Y_{lm}^* \nabla(\varphi_b^* \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \varphi_a) d^3r,$$

$$M'_{lm}(a,b) = -\frac{e\hbar}{2m} \int r^l Y_{lm}^* \nabla(\varphi_b^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_a) d^3r.$$

Mielőtt rátérnénk az általános multipól-átmenet kiválasztási szabályainak bemutatására jegyezzünk meg egy két gondolatot az általános tárgyalással kapcsolatosan. Az általunk bemutatott számítások csak nem-relatviztikus forrásokra érvényesek, valamint az elektromágneses effektusok az atommagot alkotó nukleonok egyedi mozgásából és belső mágnesezettségéből származnak. Ebből következően ez a modell nem ad számot a proton és a neutron közti „kicserélődéséből”, azaz a nukleonok közti erős kölcsönhatásból következő töltéscseréből eredő kicserélődési áramról, valamint a szintén ebből a kölcsönhatási folyamatból származó mágnesezettség megváltozásáról a mag alapállapotához képest. A bomlási folyamat teljes elméletéhez ezeket az effektusok mind

számításba kellene venni, ez azonban szinte kivitelezhetetlen. Ezért elegendő a vizsgált problémát legingább meghatározó elemeket ad hoc vizsgálni.

1.3.5.2. Általános kiválasztási szabályok

Az eddigiekben láttuk, hogy a bomlási folyamatokban az egyik legmeghatározóbb fizikai mennyiség az (l, m) kvantumszámokkal jellemzett impulzusmomentum. Az impulzusmomentum a mag sugárzási átmenetében megmaradó mennyiség, ezért alkalmas arra, hogy pontosan jellemezzük vele a folyamatot. Tekintsünk egy \mathbf{J}_a kezdeti magállapotot j_a és m_a kvantumszámokkal, ill. egy \mathbf{J}_b végállapotot j_b és m_b kvantumszámokkal. Ekkor az \mathbf{L} impulzusmomentumú foton és a kezdeti- és végállapot között a következő relációnak kell teljesülnie:

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_b + \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{J}_a - \mathbf{J}_b,$$

a releváns kvantumszámok nyelvén ez a következő relációkat jelenti (ld. Appendix B):

$$\begin{aligned} m_a - m_b &= m, \\ j_a + j_b &\geq l \geq |j_a - j_b|, \end{aligned}$$

ahol (lm) az emittált foton impulzusmomentumának kvantumszámjai. Ezek a relációk azt jelentik, hogy egy adott kezdeti állapotból egy (lm) állapotú foton kibocsátásával, avagy (lm) rendű multipól-átmenettel, csak adott végállapotba lehet jutni. Vegyük példának a dipólátmenetet, ekkor az $l=1$ és $m=0$, így a lehetséges végállapotok:

$$\begin{cases} j_a + 1 \geq j_b \geq j_a - 1 \\ m_b = m_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta l = \pm 1 \\ \Delta m = 0 \end{cases}$$

Az impulzusmomentum mellett a másik fontos jellemező a paritás, hiszen kísérleti tény, hogy a paritás a sugárzási átmenetek esetében megmaradó mennyiség. Egy tetszőleges multipól-átmenettel járó folyamat paritását az emittált sugárzás \mathbf{H} mágneses térerőssége határozza meg. Ezt könnyen beláthatjuk, hiszen láthattuk, hogy a kölcsönhatási operátor a $\mathbf{p}\mathbf{A}$ operátorszorzatot tartalmazza, és $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Tudjuk hogy a rotáció paritása -1 , azért az \mathbf{A} paritása mindig ellentétes a \mathbf{B} paritásával. Viszont a kölcsönhatási operátorban az impulzus is szerepel ami szintén -1 paritású, így mindent egybevetve egy adott multipól-átmenet paritása azonos az adott átmenetben érvényes mágneses térerősség paritásával! Tudjuk, hogy az elektromos ill. a mágneses multipól-átmenetekben a \mathbf{H} adott:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{lm}^{(E)} &= \mathbf{L} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) f_l(kr), \\ \mathbf{H}_{lm}^{(M)} &= -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^{(M)}, \end{aligned}$$

Látható, hogy az elektromos multipól-átmenet esetében a gömbfüggvények paritása határozza meg az átmenet paritását, mivel az \mathbf{L} páros. A mágneses multipól-átmenetben az \mathbf{E} paritásának felel meg a gömbfüggvény paritása, viszont a \mathbf{H} -t az elektromos tér rotációja határozza meg, és ez így egy (-1) -es szorzót jelent az előző esethez képest. Mindezeket összefoglalva adott multipól-átmenet esetében az átmenet paritása:

$$\begin{cases} (lm) \text{ rendű elektromos multipólus paritása : } (-1)^l; \\ (lm) \text{ rendű mágneses multipólus paritása : } -(-1)^l. \end{cases}$$

1.4. Az α -bomlás és az arany szabály

Az α -bomlás nem más, mint amikor a nagy nukleonszámú atommag kibocsát egy 2 protonból és 2 neutronból álló kötött nukleonrendszert (${}^4\text{He}$ atommagot), ezáltal csökkentve a meglévő nukleonszámot és a kötési energiát. Az alfa-részecske magban történő kialakulása bonyolult folyamat, mivel ezt a nukleonok között ható magerők határozzák meg: ha elegendően nagyszámú nukleont tartalmaz egy mag, akkor a magon belül kialakulhat „csomósodás”, amely kis nukleoncsoportra kvázi kötött állapotot jelent. A magon belül létrejövő alfa-részecske és a maradék nukleonból álló atommagtörzs között összetett kölcsönhatás hat, egyrészt míg az erős kölcsönhatás hatótávolságán belül van, erős vonzás mutatkozik, másrészt viszont a protonok által kifejtett elektromágneses taszítás is jelen van. Az így kialakuló eredő potenciál maximuma jóval nagyobb, mint az alfa-rész kvázi kötött állapotának energiája. Tehát felmerül a kérdés, hogy a kis energiájú részecske miként tud áthaladni a potenciálgáton? A kérdést a kvantummechanika válaszolja meg, amely szerint annak a valószínűsége, hogy egy potenciálgátnál kisebb energiájú részecske a gáton túl megjelenjen nem nulla. Ez a jelenség a kvantummechanikai alagút-effektus, amelynek elméletét George Gamow ukrán fizikus dolgozta ki. A következőkben ezt a jelenséget járjuk körbe.

Az alfa-rész által érzékelt potenciál, mint már említettünk bonyolult szerkezetű, viszont az adott problémához mérten egyszerűsíthetjük. Számunkra a potenciálgát alakja és főbb paraméterei fontosak. Ehhez domináns járulékot az elektromágneses taszítás adja, hiszen tudjuk, hogy az erős kölcsönhatás csak az R magsugáron belül fejt ki (nagyságrendekkel nagyobb) vonzó hatását, míg az alagútjelenség pont a magsugáron kívüli tartományon valósul meg, így láthatjuk, hogy végeredményben a Coulomb-taszítás határozza meg a jelenség szempontjából releváns potenciálgát jellegét. Ezért nem követünk el nagy hibát, ha az alfa-részre ható potenciált a következő formában adjuk meg:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r < R, \\ \frac{2Ze^2}{r} & R \leq r, \end{cases}$$

ahol e az elektromos töltés, Z a magtörzs (leánymag) rendszáma. Az alfa-rész hullámfüggvényét az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet adja meg:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi(\mathbf{r}) = 0,$$

ahol a centrális potenciál miatt érdemes gömbi koordinátarendszerben dolgozni. A gömbi koordinátarendszer azért is praktikus, mert így a hullámfüggvény szögfüggő részét sorbafejthetjük a gömbfüggvények szerint (centrális potenciál esetén alkalmazható módszer):

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{1}{r} \rho_l(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Ha a kapott kifejtést visszaírjuk a Schrödinger-egyenletbe, akkor az egyenlet némi átalakítás után szétcsatolódik egy szögfüggő és egy helyfüggő részre. A szögfüggő tag, amely értelemszerűen csak a Laplace-operátor megfelelő komponenseit, ill. a gömbfüggvényeket tartalmazza egyszerűen átalakítható a szabad rotátor sajátértékegyenlete alapján, hiszen a gömbfüggvények annak a sajátfüggvényei:

$$\Delta_{\vartheta\varphi} Y_l(\vartheta, \varphi) = \frac{2m}{\hbar^2 r^2} l(l+1) Y_l(\vartheta, \varphi).$$

A rotátor sajátértékegyenlete alapján a szögfüggő tag helyettesíthető a megfelelő sajátértékekkel, így az Schrödinger-egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{d^2}{dr^2}(\rho_l(r)) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \left(V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right) \rho_l(r) = 0.$$

Az egyenlet bal oldalának utolsó tagja nem más, mint a centrifugális potenciál. Vizsgáljuk meg, hogy a két megjelenő potenciál milyen járulékot adnak az alfa-részecske „kibocsátásának” helyén. Ehhez a két potenciált írjuk a következő alakba:

$$C(R) = \frac{2Ze^2}{R},$$

$$G(R) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{R^2},$$

Vegyünk tipikus példának az urán 238-as izotópját, ebben az esetben $Z = 90$, $A = 238$, amelyből $R \sim 8 \cdot 10^{-13}$ cm, az alfa rész tömege $m \cong 6,69 \cdot 10^{-27}$ kg, ebben az esetben a centrifugális és a Coulomb potenciál aránya

$$\frac{G(R)}{C(R)} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{2Ze^2} \frac{1}{R} \approx \frac{l(l+1)}{500} \text{-nak}$$

adódik. A két potenciál hányadosából látszik, hogy kis l értékekre a centrifugális potenciál elhanyagolható a Coulomb potenciál mellett, és ez az arány a távolság növekedésével egyre inkább csökken. Ezt figyelembe véve a probléma tovább egyszerűsíthető azzal, hogy csak a Coulomb potenciált hagyjuk meg. Ezen egyszerűsítések mellett ha bevezetjük az $F(r) = r\rho(r)$ függvényt, a következőt kapjuk:

$$\frac{d^2}{dr^2} F(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] F(r) = 0.$$

A fenti egyenlet megoldása bonyolult, hiszen a potenciál a helyváltozó szerint két függvényként van definiálva. Emiatt célszerű az egyenlet a potenciál szerinti tartományokra bontani úgy, hogy a tartományok határán megköveteljük a folytonosságot:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2} F_1(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E + V_0] F_1(r) &= 0, & 0 \leq r < R \\ \frac{d^2}{dr^2} F_2(r) - \frac{2m}{\hbar^2} \left[\frac{2Ze^2}{r} - E \right] F_2(r) &= 0, & R \leq r \leq R_c \\ \frac{d^2}{dr^2} F_3(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{2Ze^2}{r} \right] F_3(r) &= 0 & R_c < r\end{aligned}$$

ahol R_c az a távolság ahol $E = V(R_c)$. Természetesen mindhárom függvényre, ill. deriváltjukra vonatkozik a folytonossági feltétel. A három egyenlet közül ez első és az utolsó megoldása triviális síkhullámok lineárkombinációiként állítható elő. A második egyenlet már problémás, hiszen a függvényt szorzó együttható függ a helykoordinátától. Az ilyen esetekben alkalmazható (amennyiben azt a feltételek megengedik) a WKB közelítés (Wentzel-Kramers-Brillouin). A következő alfejezetben ezt az általános eljárást ismertetjük.

1.4.1. A WKB közelítés

Legyen egy általános másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet a következő formában:

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) + k^2(r) \phi(r) = 0,$$

ahol $k(r)$ r szerint nagyon lassan változó függvény. Az egyenlet általános megoldását keressük egy speciális próbafüggvény formájában:

$$\phi(r) = A(r) e^{i\chi(r)},$$

amennyiben a feltételezett próbafüggvényt visszairjuk az egyenletbe és elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor egy komplex formát kapunk:

$$\frac{d^2 A}{dr^2} - \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 A + k^2 A + i \left[2 \frac{dA}{dr} \frac{d\chi}{dr} + A \frac{d^2 \chi}{dr^2} \right] = 0.$$

A kapott egyenlet bal oldal egy tisztán valós és egy tisztán képzetes részt tartalmaz, amely két tag összege, csak és kizárólag akkor lehet nulla, ha tagonként nullák. Ezzel a differenciálegyenlet egy csatolt differenciálegyenlet-rendszeré esik szét:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 A}{dr^2} - \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 A + k^2 A &= 0, \\ 2 \frac{dA}{dr} \frac{d\chi}{dr} + A \frac{d^2 \chi}{dr^2} &= 0.\end{aligned}$$

A második egyenletből némi átrendezéssel és integrálással kaphatunk egy összefüggést az egyenlőre ismeretlen A és χ függvények között. Ehhez rendezzük a második egyenletet

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\chi}{dr} \right),$$

majd kihasználva a logaritmus függvény deriváltját:

$$\frac{d}{dr} \ln(A) = \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{d\chi}{dr} \right) \right),$$

amelyet könnyen integrálva megkapjuk a keresett összefüggést

$$\ln(A) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{d\chi}{dr} \right) + const \Rightarrow A = C \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy eddig a lépésig egzakt átalakítások révén jutottunk. Ezután vizsgáljuk meg az egyenlet valós részének komponenseit. A deriváltakat tartalmazó tagokban szereplő $A(r)$ függvényt a fenti képlettel kifejezhetjük a $\chi(r)$ deriváltjaival:

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = -\frac{C}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^{-5/2} \left[\frac{d\chi}{dr} \frac{d^3 \chi}{dr^3} - \frac{3}{2} \frac{d^2 \chi}{dr^2} \right],$$

$$\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 A = C \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^{3/2}.$$

Az egyenlet megoldásánál alkalmazott próbafüggvényben az $A(r)$ az amplitúdót, a $\chi(r)$ a fázist jellemző függvények. Emlékezzünk vissza közelítés alapfeltételére, amely az volt, hogy az egyenletben szereplő $k(r)$ lassan változó függvény legyen. Ez a függvény az eredeti egyenlet szerkezetéből következően összefüggésbe áll a fázissal. Ezért feltételezhetjük, hogy $\chi(r)$ is lassan változó függvény, így a $\chi(r)$ deriváltjaival kifejezett tagok között értelemszerűen fennáll a következő reláció:

$$\left| \frac{d^2 A}{dr^2} \right| \ll \left| \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 A \right|.$$

Az valós részre vonatkozó egyenlet vezető rendben csak két tagból áll, amelyből kifejezhető a $\chi(r)$ függvény

$$-\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 A + k^2 A \approx 0 \Rightarrow \chi(r) \approx \int_r k(r') dr'.$$

Ezzel kifejeztük az $A(r)$ és $\chi(r)$ függvényeket, így felírhatjuk a keresett megoldást:

$$\phi(r) \approx \frac{C^\pm}{\sqrt{k}} e^{\pm i \int_r k(r') dr'}.$$

A közelítő eredményről könnyen beláthatjuk, hogy $k = \text{konstans}$ határesetben visszaadja az oszcillátor esetén szokásos síkhullám megoldást, valamint látható, hogy a helyfüggés megváltoztatja mind az amplitúdót, mind a fázist.

1.4.2. Az alagúteffektus leírása WKB közelítéssel

Emlékezzünk vissza, hogy az alfa-bomlást leíró Schrödinger-egyenletet a tartományonként definiált potenciál miatt három egyenletre bontottuk

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} F_1(r) + k_1^2 F_1(r) &= 0, & k_1^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} [E + V_0] & 0 \leq r < R; \\ \frac{d^2}{dr^2} F_2(r) - k_2^2 F_2(r) &= 0, & k_2^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[\frac{2Ze^2}{r} - E \right] & R \leq r \leq R_c; \\ \frac{d^2}{dr^2} F_3(r) + k_3^2 F_3(r) &= 0 & k_3^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{2Ze^2}{r} \right] & R_c < r; \end{aligned}$$

ahol minden $k_i \geq 0$, valamint az $F_i(r)$ függvények (és deriváltak) a tartományok határán folytonosak. (Természetesen a tényleges hullámfüggvény $\psi(r) = \mathbf{F}/r$, és ennek a folytonossága szükséges feltétel, viszont látható az is, hogy az $1/r$ függvény a vizsgált tartományokon folytonos, ezért elegendő az $F_i(r)$ -t vizsgálni.) A három egyenlet a WKB közelítéssel megoldható:

$$\begin{aligned} F_1(r) &= \frac{C_1^+}{\sqrt{k_1}} e^{ik_1 r} + \frac{C_1^-}{\sqrt{k_1}} e^{-ik_1 r}, \\ F_2(r) &= \frac{C_2^+}{\sqrt{k_2}} e^{\int_R^r k_2 dr'} + \frac{C_2^-}{\sqrt{k_2}} e^{-\int_R^r k_2 dr'}, \\ F_3(r) &= \frac{C_3^+}{\sqrt{k_3}} e^{i \int_{R_c}^r k_3 dr'} + \frac{C_3^-}{\sqrt{k_3}} e^{-i \int_{R_c}^r k_3 dr'}, \end{aligned}$$

ill. a megfelelő folytonossági feltételek

$$\begin{aligned} F_1(R) &= F_2(R) & \left. \frac{dF_1(r)}{dr} \right|_R &= \left. \frac{dF_2(r)}{dr} \right|_R, \\ F_2(R_c) &= F_3(R_c) & \left. \frac{dF_2(r)}{dr} \right|_{R_c} &= \left. \frac{dF_3(r)}{dr} \right|_{R_c}, \end{aligned}$$

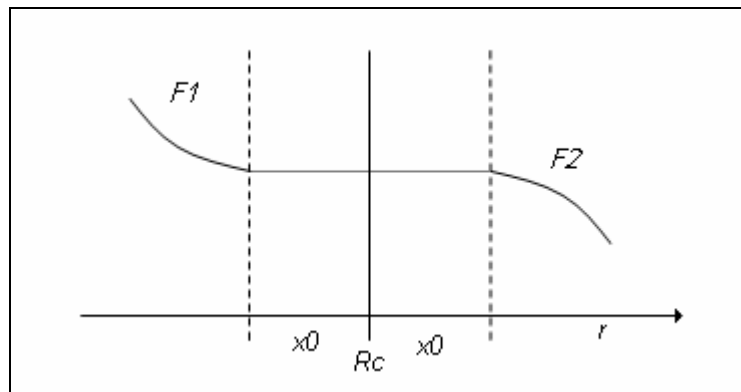
valamint tudjuk, hogy a $r \rightarrow \infty$ határesetben nincs visszaverődés, amelyből az következik, hogy $C_3^- = 0$. Mielőtt továbblépnénk meg kell jegyeznünk valamit. A négy folytonossági feltétel közül az a kettő, amely a R magsugárra vonatkozik egzaktul teljesíthető, viszont a másik két, R_c helyre vonatkozó feltétellel probléma van, hiszen R_c pont úgy lett definiálva,

hogy ott $E = V(r)$ és ezzel $k_2 = k_3 = 0$, amely értékek mellett a megfelelő $F(r)$ függvénynek és deriváltjának szingularitása van. Ahhoz, hogy a folytonossági feltétel értelmezhető legyen egy speciális eljárást kell alkalmaznunk: a határfeltételt úgy regularizáljuk, hogy az $F_2(r)$ értelmezési tartományát megszorítjuk az $r \in [R_c - x_0, R_c + x_0]$ halmazra, míg az $F_3(r)$ értelmezési tartományát az $r \in [R_c + x_0, \infty[$ halmazra, amennyiben x_0 értékét kellően kicsire választjuk a peremfeltételek az új határokon

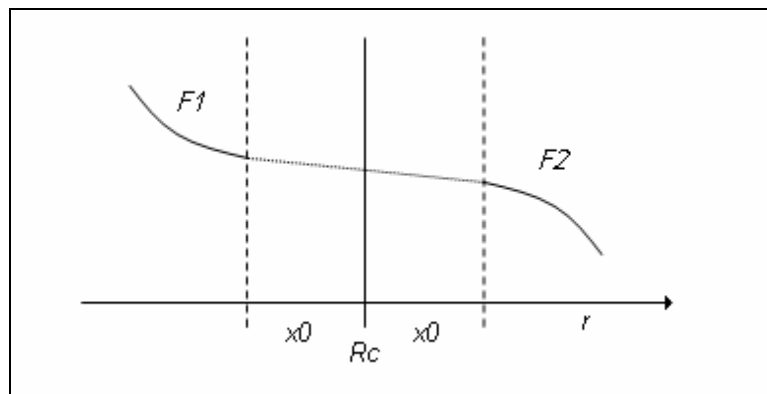
$$F_2(R_c - x_0) \approx F_3(R_c + x_0), \quad \text{és} \quad \left. \frac{dF_2(r)}{dr} \right|_{R_c - x_0} \approx \left. \frac{dF_3(r)}{dr} \right|_{R_c + x_0}.$$

A levágás segítségével a szingularitást eltüntettük a határfeltételből, azonban felmerül a kérdés, hogy milyen a hullámfüggvény az $[R_c - x_0, R_c + x_0]$ tartományon. A jelenlegi határfeltétel mellett csak a konstans érték jöhet szóba, ez viszont törést jelentene hullámfüggvényben (2.3.1. ábra). Ez a probléma is megoldható, ha kérdéses tartományon konstans helyett lineáris interpolációt alkalmazunk (2.3.2. ábra), amely egyben a módosított határfeltételt is megadja ($x_0/R_c \ll 1$ határesetben igaz):

$$F_2(R_c - x_0) = F_3(R_c + x_0) - 2x_0 \left. \frac{dF_3}{dr} \right|_{R_c + x_0}.$$



2.3.1. ábra: A módosított peremfeltétel lineáris interpoláció nélkül



2.3.2. ábra: A módosított peremfeltétel lineáris interpolációval

Mielőtt rátérnénk a határfeltételek kifejtésére, vizsgáljuk meg az F_1 és F_2 függvényekben szereplő $k(r)$ függvények viselkedését a módosított határokon:

$$k_2^2(R_c - x_0) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{2Ze^2}{R_c - x_0} \right) \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{R_c} - \frac{2Ze^2}{R_c} \left(1 + \frac{x_0}{R_c} \right) \right) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2Ze^2}{R_c^2} x_0,$$

$$k_3^2(R_c + x_0) = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{2Ze^2}{R_c + x_0} \right) \approx \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{R_c} - \frac{2Ze^2}{R_c} \left(1 - \frac{x_0}{R_c} \right) \right) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2Ze^2}{R_c^2} x_0,$$

látható, hogy az $x_0 \ll R_c$ mellett a két függvényérték határon vett értékei megegyeznek,

$$k_2^2(R_c - x_0) \approx k_3^2(R_c + x_0).$$

Ez a felismerés nagymértékben leegyszerűsíti a további számításokat. A C_i együtthatók számításához írjuk fel szükséges deriváltakat vezető rendben:

$$\frac{dF_2(r)}{dr} \approx C_2^+ \sqrt{k_2} e^{\int_R^r k_2(r') dr'} - C_2^- \sqrt{k_2} e^{-\int_R^r k_2(r') dr'},$$

$$\frac{dF_3(r)}{dr} \approx iC_3^+ \sqrt{k_3} e^{i \int_{R_c}^r k_3(r') dr'},$$

ahol a dA/dr deriváltakat az alkalmazott közelítés miatt elhagyjuk. Most írjuk fel az R_c pontbeli határfeltételt a megfelelő módosításokkal:

$$C_2^+ e^{\int_R^{R_c-x_0} k_2(r') dr'} + C_2^- e^{-\int_R^{R_c-x_0} k_2(r') dr'} = [1 - 2x_0 k_3(R_c + x_0)] C_3^+ e^{i \int_{R_c}^{R_c+x_0} k_3(r') dr'},$$

$$C_2^+ e^{\int_R^{R_c-x_0} k_2(r') dr'} - C_2^- e^{-\int_R^{R_c-x_0} k_2(r') dr'} = iC_3^+ e^{i \int_{R_c}^{R_c+x_0} k_3(r') dr'},$$

ahol kihasználtuk, hogy a kérdéses határokon a k_2 és k_3 x_0 kis értékei esetén megegyeznek, ezért egyszerűsíthetők. A fenti összefüggések jobb oldalán szereplő integrál alsó és felső határa nagyon közel esnek egymáshoz, valamint az R_c -hez közeli tartományra szorítják az integrált. Az R_c -hez közel viszont a $k_3 \rightarrow 0$ -hoz, ezért ennek az integrálnak az értéke közelíthető nullával, ezért az exponenciális tag eltűnik. Ugyanezen megfontolások végett, a bal oldali integrálok felső határa helyettesíthető R_c -vel. Így az egyszerűsített egyenletek a következők:

$$C_2^+ e^{\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} + C_2^- e^{-\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} = [1 - 2x_0 k_3(R_c + x_0)] C_3^+,$$

$$C_2^+ e^{\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} - C_2^- e^{-\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} = iC_3^+,$$

Amelyekből egyszerű számítással megkapjuk a keresett együtthatók közti összefüggéseket:

$$C_3^+ = \frac{2}{1-i-i2x_0k_3(R_c+x_0)} C_2^- e^{-\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} \quad \text{és} \quad C_2^+ = (C_2^-)^* e^{-2\int_R^{R_c} k_2(r') dr'}.$$

Láthatjuk, hogy az első kifejezés tartalmazza a regularizációból és a lineáris interpolációból származó x_0 paramétert, amely egy nem fizikai paraméter, ezért nem szabad megjelennie az eredményekben. Ahhoz, hogy ezt kezelhessük, meg kell vizsgálnunk a közelítéseket. Az x_0 paraméterrel arányos tag a nevezőben:

$$x_0 k_3(R_c+x_0) \approx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} 2Ze^2 \frac{x_0^2}{R_c} (1-(1-x_0))} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} 2Ze^2 \frac{x_0}{R_c} x_0^2} \ll 1,$$

a fenti feltételezés akkor igaz, ha $x_0/R_c \ll 1$ feltételezés érvényes, hiszen a kifejezésben lévő gyök alatt x_0 -ban másodrendű tag is szerepel, amellyel az érték erősen közelít a nullához. Ezzel a C_3 együtthatóra vonatkozó összefüggés meghatározó tagjai:

$$C_3^+ = \frac{2}{1-i} C_2^- e^{-\int_R^{R_c} k_2(r') dr'} \Rightarrow C_3^+ \sim C_2^- e^{-\int_R^{R_c} k_2(r') dr'}.$$

Még hátra van az R mag sugárnál megkövetelt folytonosság vizsgálata. Az $r < R$ tartományra vonatkozó egyenlet egyszerű oszcillátor egyenlet, amelynek megoldása

$$F_1(r) = \frac{C_1^+}{\sqrt{k_1}} e^{ik_1 r} + \frac{C_1^-}{\sqrt{k_1}} e^{-ik_1 r}.$$

Ebben az esetben a C_1 együtthatókat definiálhatnánk úgy is, hogy a nevezőben lévő tagok eltűnjenek, hiszen k_1 konstans. Azonban számunkra szemléletesebb ez a forma. Ez a síkhullám megoldás a magon belül érvényes, amely ebben a modellben egy véges potenciálgödörként jelenik meg. Ha feltételezzük, hogy a potenciálgödör falán majdnem tökéletes reflexió történik, akkor

$$|C_1^+| \sim |C_1^-|,$$

és a síkhullám megoldást a következő speciális alakban keressük:

$$F_1(r) = \frac{C_1}{\sqrt{k_1}} \sin(k_1 r + \eta),$$

ahol η fázistolás a mag struktúrájával van kapcsolatban (ebbe a paraméterbe zsúfoljuk az magerő hatását). Ezek után a peremfeltételek könnyen felírhatók:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{\sqrt{k_1}} \sin(k_1 R + \eta) &= \frac{C_2^-}{\sqrt{k_2(R)}}, \\ C_1 \sqrt{k_1} \cos(k_1 R + \eta) &= -C_2^- \sqrt{k_2(R)}, \end{aligned}$$

majd a két egyenletet elosztva egy transzcendens egyenletet kapunk

$$\tan(k_1 R + \eta) = -\frac{k_1}{k_2(R)}.$$

A fenti számításoknál az η fázistolást konstansnak kezeltük, amely csak abban az esetben igaz, ha tényleg jó a reflexió a potenciálgát falánál, amely tényleg feltételezhető, hiszen az alfa részecske kvázi kötött (gerjesztett) állapotban van a magon belül. A fenti folytonossági feltételekkel kifejezhető a C_3 :

$$C_3^+ \approx C_1 \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \sin(k_1 R + \eta) e^{-\int_R^{R_c} k_2 dr'},$$

amellyel felírható a teljes hullámfüggvény a potenciálgáton kívüli régióra:

$$\psi_3(r) \approx C_1 \sqrt{\frac{k_2(R)}{k_1}} \frac{k_1}{k_2(R)} \frac{1}{\sqrt{k_3(r)}} e^{-\int_R^{R_c} k_2 dr'} e^{i \int_{R_c}^r k_3 dr'},$$

ahol kihasználtuk a magsugárnál élő peremfeltételt. A C_1 a $\psi_1(r)$ hullámfüggvényhez tartozó normálási konstans. Ezzel tehát megkaptuk az egyes régiókra vonatkozó hullámfüggvények egy közelítő alakját. Számunkra az igazán fontos jelenség az alagút effektus, amely mint már említettük kimondja, hogy a potenciálgáton való áthaladásnak véges valószínűsége van. Egy kvantummechanikai rendszer egy adott helyen értelmezett megtalálási valószínűségét a hullámfüggvény négyzete adja meg. A mi modellünkben a „potenciálgáton túli” tartományt a $\psi_3(r)$ hullámfüggvény írja le, ez azt jelenti, hogy itt a részecske energiája nagyobb, mint a jelenlévő potenciál. Az időegységre eső átmeneti valószínűséget a következőképpen számíthatjuk:

$$T \approx 4\pi v_\alpha |\psi_3(R_k)|^2,$$

ahol R_k olyan nagyságrendben van, hogy

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{\hbar k_3(R_k)}{m}.$$

Ezzel az időegységre eső átmeneti valószínűség, vagy bomlási valószínűség:

$$T \approx \frac{4\pi\hbar}{m} \frac{1}{R_k} \frac{k_1^2}{k_2(R)} e^{-2 \int_R^{R_c} k_2(r') dr'} = F(E, R, Z, A) e^{-G},$$

ahol az $F(E, R, Z, A)$ tartalmazza a magfizikai tulajdonságokat (magerő, magszerkezet), amely függvényt mi közelítőleg számítottunk, a G a Gamow-faktor:

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E} dr.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk az alfa bomlás időbeli lefolyását, ill. a fenti eredmények kapcsolatát a Geiger-Nutall-törvényel, valamint kitérünk a Fermi aranyszabály és a fenti eredmények kapcsolatára.

1.4.3. Az alfa-bomlás és a Geiger-Nutall-törvény

Vegyünk N db α -bomló atommagot, amelyek mindegyikében van egy kvázi kötött alfa-részecske. Ekkor elmondhatjuk, hogy egymástól függetlenül, másodpercenként N db részecske ütközik a mag potenciálfalának, amelyekből az alagúteffektus révén $N \cdot T$ jut ki az atommagból, tehát tulajdonképpen ez a másodpercenkénti bomlások számát adja meg. Az atommagok időbeli változását a bomlástörvényhez hasonló mérlegegyenlet adja meg:

$$\frac{dN}{dt} = -NT,$$

amely megoldása:

$$N(t) = N_0 e^{-Tt}.$$

A részecskék száma a tapasztalattal egyezően exponenciálisan csökken. Most vegyük a T bomlási állandó logaritmusának energiafüggését:

$$\ln T = a - b \cdot \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E} dr,$$

a képlet alapján, ha nő az alfa-részek E energiája, akkor csökken az integrálási határ (R_c csökken), ill. ezzel együtt a gyök alatti különbség értéke is. Ezek együttesen azt eredményezik, hogy nő a bomlás valószínűsége. A bomlási valószínűség energiafüggését kísérleti úton *Geiger* és *Nutall* határozta meg (1911), az általuk illesztett függvény

$$\ln T = a' + b' E.$$

Az általuk illesztett függvény és az elméleti számításokkal kapott eredmény némileg eltér egymástól, viszont nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a mérési bizonytalanság és az illesztés pontossága a XX. század elején erős korlátok között mozgott. A tapasztalt eredmény viszont még így is kvalitatívan közel helyes eredményt adott.

1.4.4. Az aranyszabály

Az alfa-bomlás kvantummechanikai tárgyalása nehezebb, mint a γ -bomlás esetében, mivel itt az atommagon belüli alfa-rész kialakulása és kvázi-kötött állapotba kerülése nem fejthető ki a mag sajátállapotainak bázisával (a Fermi aranyszabály mátrixelemének kezdeti állapota), hiszen megváltozik maga az atommag is. Ezért direkt csatolást alkalmazunk a kötött állapotok és kölcsönható mezők között: a magon belüli alfa-részt független részecskének tekintjük, amely „ütközik” a potenciálfallal, és alkalmanként át is haladhat rajta. Az i nukleonból álló (gerjesztett) mag kezdeti állapotát jelölje a

$$\psi_i(r_1, r_2 \dots r_i), \quad \int_V \psi_i^* \psi_i d^3 r_1 \dots d^3 r_i = 1$$

normált állapotfüggvény, a szintén i nukleonból álló leánymag (végállapot) állapotfüggvényét a

$$\psi_j(r_1, r_2 \dots r_i), \quad \int_V \psi_j^* \psi_j d^3 r_1 \dots d^3 r_j = 1,$$

ahol a nukleonok száma azonos a kezdeti állapot nukleonszámával. Mivel ebben a közelítésben az alfa-rész a kezdeti magon belül is „független” részecskének tekintendő. A magon belüli (azaz a kezdeti állapotban lévő) alfa-rész hullámfüggvénye legyen az előző szakaszban ismertetett módon, a stacionárius Schrödinger-egyenlet megoldása (W.K.B. közelítés)

$$\phi_1(r) = \begin{cases} \frac{F_1(r)}{r} & 0 < r < R, \\ \frac{F_2(r)}{r} & R < r < R_c, \\ \frac{F_3(r)}{r} & R_c < r, \end{cases}$$

míg a végállapotot egy egyszerű kifutó síkhullámmal írjuk le, amely az aszimptotikus (atommagtól távoli) esetnek felel meg:

$$\phi_3(r) \approx N e^{ikr}.$$

ahol \mathbf{k} a „szabad” kifutó alfa-rész hullámszám-vektora, N normálási állandó. Az arany szabályban lévő átmeneti mátrixelem az említett közelítés mellett a következőképpen írhatjuk fel:

$$M_{ij} = \int \int \psi_j^*(r') \phi_3^*(r) \mathbf{O}(r') \phi_1(r) \psi_i(r') d^3 r' d^3 r,$$

ahol az r' a magban lévő nukleonok koordinátáit jelöli, az r az alfa-rész koordinátája, az \mathbf{O} operátor pedig a csatolást a kezdeti és végállapotbeli mag állapotai között, ezért ez csak a magban lévő nukleonok koordinátáitól függhet. Ne felejtsük el, hogy mag hullámfüggvényei most azonos nukleonszámot, de különböző energiájú állapotot írnak le (értelemszerűen a kezdeti a végállapothoz képes gerjesztett állapot). A hullámfüggvények ismeretében kifejtethetjük a mátrixelemet. Amikor az alfa-rész koordinátája szerint integrálunk az egész térre, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a végállapot kimenő síkhullám megoldását csak a magon kívüli tartományra értelmezzük ($r > R_c$), ezért az integrálhoz csak az ennek megfelelő kezdeti állapotban lévő hullámfüggvénnyel (F_3/r) képzett szorzat ad járulékot:

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \int N^* C_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_2(R)k_3(r)}} e^{-\int_R^{R_c} k_2 dr'} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\int_{R_c}^r k_3 dr'}}{r} d^3 r \int \psi_j^*(r') \mathbf{O}(r') \psi_i(r') d^3 r' = \\
 &= N^* C_1 e^{-\int_R^{R_c} k_2 dr'} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-i\int_{R_c}^r k_3 dr'}}{r \sqrt{k_2(R)k_3(r)}} d^3 r \int \psi_j^*(r') \mathbf{O}(r') \psi_i(r') d^3 r' = \\
 &= N^* C_1 e^{-\int_R^{R_c} k_2 dr'} M_\alpha M_n,
 \end{aligned}$$

az alfa-rész koordinátája szerinti integrált és a magban lévő nukleonok szerinti integrált szeparálhatjuk, így a mátrixelemet felbontottuk a magállapotok átmenetét leíró komponensre (M_n), egy alfa-részre vonatkozó részre (M_α), ill. egy konstans tagra, amely a mag paramétereitől (magsugár, magon belüli alfa-rész kvázi-kötött állapotának energiája) függ. Az aranyszabályhoz még szükséges az alfa-részecske végállapotainak sűrűsége. Az egyszerűség kedvéért a végállapotok számításánál elhanyagoljuk a mag visszalökése által elvitt impulzust és energiát (Szilárd-Chalmers effektus), így a $(p, p+dp)$ impulzussal kirepülő, izotrop eloszlású alfa-rész állapotszáma

$$\rho = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 dE} = \frac{4\pi p m}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi m \hbar k}{(2\pi\hbar)^3},$$

ahol kihasználtuk, hogy nem relativisztikus esetben $E = p^2/(2m)$. Az átmeneti valószínűség az aranyszabály értelmében:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{ij}|^2 \rho = \frac{m\hbar k}{\pi\hbar^3} |N C_1|^2 |M_\alpha M_n|^2 e^{-2\int_R^{R_c} k_k dr'} = F(E, R, Z, A) e^{-G},$$

ahol láthatjuk, hogy az átmeneti valószínűség számításánál ismét megjelent az alagúteffektust leíró Gamow-faktor, ill. egy speciális függvény, amely tartalmazza a magon belüli állapotváltozásokat és az alfa-rész fázissterének tulajdonságait.

1.5. A β -bomlás

Kvantummechanikai szinten a legnehezebben tárgyalható bomlási folyamat a béta-bomlás. Ennek oka a kölcsönhatási operátor leírása, amelyben nehezítést jelent, hogy a végállapotban a nukleon mellett megjelennek a könnyű leptonok (nem úgy mint az alfa-bomlás esetén), így kizárható az erős kölcsönhatás, valamint nincs foton a rendszerben, ezért az elektromágneses kölcsönhatás sem szerepel. Mindezeket egybevetve ez egy teljesen új kölcsönhatási formát eredményez, amelyet gyenge kölcsönhatásnak neveznek. A továbbiakban a béta-bomlás egyszerű (Fermi) elméletével foglalkozunk, majd az alfejezet végén érintőlegesen kitérünk a modern térelméleti leírás alapjaira (elektrogyenge-elmélet).

1.5.1. Spektrum és kiválasztási szabályok

Mint tudjuk ahhoz, hogy a béta-bomlás során az energia- és az impulzus-megmaradás teljesüljön az elektron, ill. a pozitron mellett az előbbi esetén antineutrínónak, az utóbbi estén pedig neutrínónak kell keletkeznie (W. Pauli). Így az alapfolyamatok:

$$\beta^+ : p \rightarrow n + e^+ + \nu_e;$$

$$\beta^- : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

ahol a neutrínó „felülvonása” az antineutrínót jelöli. A fenti folyamatokban már a töltés-, barionszám- és leptonszám-megmaradás is egyaránt teljesül (a leptonszámot a neutrínó bevezetése helyesbítette). A neutrínó az elektronnál nagyságrendekkel kisebb (vagy nulla) nyugalmi tömegű, töltetlen, csak a gyenge kölcsönhatásban résztvevő részecske. Éppen ezért a detektálása igen problematikus. Ez abból a szempontból jelent problémát, hogy a kis tömege miatt a bomlásból származó energia és impulzus jelentős részét ő hordozza, így komolyan befolyásolja a könnyen mérhető béta-rész spektrumát. A következőkben ezt vizsgáljuk részletesebben. A számítások egyszerűsítéséhez a következő elhanyagolást tesszük:

- elhanyagoljuk a megmaradó mag és a keletkezett elektron közti Coulomb-kölcsönhatást;
- nem számolunk a megmaradó mag visszalökődésével.

A Coulomb-kölcsönhatás elhanyagolása csak akkor tehető meg, ha nagy energiájú elektronról van szó, ill. ha a mag rendszáma $Z < 10$. A visszalökődés elhagyása is értelemszerűen akkor érvényes, ha a mag tömege jóval nagyobb, mint az elektrontömeg ($M_{\text{mag}} \gg m$). A számunkra fontos információ a spektrum, amely most a bomlási elektronok impulzus szerinti eloszlását jelenti. Ha tudjuk, hogy a bomlás során E_0 energia szabadul föl, akkor egy nulla-tömegű (mára bebizonyosodott, hogy nagyon kicsi, de véges nyugalmi tömegű) neutrínó keletkezése mellett az elektron energiája $E_{\text{max}} = E_0$ lehet, az ehhez az energiához tartozó maximális impulzus pedig:

$$\left(\frac{p_e}{mc} \right)_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{E_{\text{max}}}{mc^2} \right)^2 - 1},$$

a megmaradó mag visszalökődési energiáját elhanyagoljuk, viszont az impulzusát (\mathbf{P}), még ha kicsi is, bele vesszük az impulzus-megmaradás összefüggésébe (ez lehetséges, hiszen az energia az impulzusban másodrendű mennyiség). Ha a kezdeti mag nyugalomban van akkor az impulzus-megmaradás:

$$\mathbf{P} + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu = 0,$$

a kis visszalökődés miatt, a végállapotok fázistérét közelíthetjük, mint két részecske (elektron + neutrínó) fázistere, mely fázistér lehetséges állapotait a részecskék összenergiája határozza meg, amelyekre fennáll az energia-megmaradás tétele:

$$E_e + E_\nu = E_0.$$

Az eddigi gondolatmenetből érezhető az a posztulátum, hogy a bomlási valószínűség vezető rendben egyenesen arányos az elérhető fázistérfogat (állapottér) méretével. Éppen ezért szükséges a fázistérfogat és ezzel a bomlási állapotok meghatározása. Jelöljük az elektront magába foglaló elemi térfogatot dV_e -vel, az impulzusának nagysága a $[p_e, p_e+dp_e]$ intervallumba essen, míg repülési iránya a $d\Omega_e$ térszögbe. A neutrínóra is ugyanezek a mennyiségek érvényesek csak „e” index helyett „ ν ” indexszel. Ekkor a fázistérfogat

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e d\Omega_e dV_e p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu dV_\nu,$$

ha kihasználjuk az energia-megmaradás tételét és, hogy a neutrínónak nincs nyugalmi tömege, azaz $E_\nu = cp_\nu$, a neutrínó impulzusára vonatkozó differenciál kifejezhető a

$$dp_\nu = \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial E_0} \right) dE_0 = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial (E_0 - E_e)}{\partial E_0} \right) dE_0 = \left(\frac{c^2}{c^3} \right) dE_0 = \left(\frac{E_\nu^2}{c^3 p_\nu^2} \right) dE_0 = \left(\frac{(E_0 - E_e)^2}{c^3 p_\nu^2} \right) dE_0$$

formában, amely azért praktikus, mert visszairva a fázistérfogat képletébe a neutrínó impulzus eltűnik a kifejezésből, így csak az elektron impulzusát fogja tartalmazni. A fázistérfogatot (állapotszámot) felírhatjuk a $\rho(E_0)dE_0$ alakban is, ahol $\rho(E_0)$ a teljes bomlási energiára eső végállapotok sűrűsége, amely a fenti kifejezések alapján egyszerűen felírható:

$$\rho(E_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 \frac{(E_0 - E_e)^2}{c^3} dp_e d\Omega_e dV_e d\Omega_\nu dV_\nu.$$

A fenti állapot-sűrűség a posztulátum értelmében arányos azzal a valószínűséggel, hogy a béta-bomlás adott részecskeállapotba vezet. Láthatjuk, hogy az állapot-sűrűség egyik jellemzője a bomláskor keletkező részecskék repülési iránya. A bomlási folyamat (a labor rendszerben nyugvó kezdeti mag miatt) izotrópnak tekinthető, nincs kitüntetett irány egy adott részecskére nézve sem. Természetesen a két részecske egymáshoz képesti repülési iránya ($d\Omega_{ev}$) között korrelációt jelent az impulzus-megmaradás, ezt figyelembe véve a két részecske térszögére vonatkozó differenciál kifejezhető:

$$d\Omega_e d\Omega_\nu = d\Omega d\Omega_{e\nu},$$

ahol $d\Omega$ egy független izotrop eloszlású szögváltozó, amely az egyik részecske (elektron) izotrop repülési irányát jelöli, míg a $d\Omega_{e\nu}$ a két részecske közti relatív térszöget. Vegyük észre, hogy az előbbire integrálhatunk, így az állapotsűrűségben figyelembe vesszük az összes lehetséges irányba repülő elektron állapotait. Amennyiben az egész vizsgált bomlási folyamatot, azaz mind a neutrínó, mind az elektron emissziót egy hipotetikus dobozon belülré helyezzük, akkor a térfogatelemek szerint integrálhatunk. Így az adott impulzussal emittált elektronra vonatkozó teljes végállapot sűrűség:

$$\rho(E_0) = \frac{V^2}{16\pi^5 \hbar^6} p_e^2 \frac{(E_0 - E_e)^2}{c^3} dp_e d\Omega_{e\nu}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti kifejezés egyúttal tartalmazza a béta-részecske spektrumát is, természetesen az impulzussal kifejezve:

$$P(p) dp = C p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp,$$

ahol C egy konstans. A képletet könnyen ábrázolhatjuk, így megkapjuk a béta-spektrumot, abban az esetben, amikor a neutrínót tömegtelennek tekintjük. Amennyiben a neutrínónak véges tömeget tulajdonítunk, akkor az tapasztalhatjuk, hogy nem relativisztikus energiájú esetben ($E_\nu - m_\nu c^2 \ll m_\nu c^2$), a béta-spektrum E_{\max} -hoz közeli tartományon „kilaposodik”. Ez az effektus elhanyagolható ultra-relativisztikus ($E_\nu \gg m_\nu c^2$) neutrínó mellett. Az eddigi kísérleti eredmények alapján, mérési hibán belül a nulla tömegű vagy az ultra-relativisztikus energiájú neutrínó esetében várható spektrumot mérték, azonban a kis neutrínó tömeg így sem zárható ki. A jelenlegi kísérletek alapján csak annyi mondható el, hogy az elektron-neutrínó tömege kisebb, mint 2,2 eV.

Mielőtt tovább tárgyalnánk az átmeneti (bomlási) valószínűség elemeit, fontos megemlíteni a fent alkalmazott közelítés egy hibáját. Az egyik egyszerűsítő feltevésünk az emittált elektron és a leánymag közti Coulomb kölcsönhatás elhanyagolása volt. Ezzel a probléma „rugalmas ütközés” egyszerűsödött, és az energia- és impulzus-megmaradásból megkaptuk a béta-rész spektrumát. Ebben a képben az egész rendszert egy véges doboz térfogatba zártuk, amelyre integráltunk azzal a hallgatólagos feltétellel, hogy az impulzus nem függ a helytől. Ha viszont a töltött részek közti Coulomb kölcsönhatás nem elhanyagolható, akkor a távolható kölcsönhatás miatt az impulzus helyfüggővé válik, ezzel a részecskék közti impulzus-megmaradás megadott formája csupán lokális lesz, valamint a térfogatintegrál sem végezhető el, hiszen az impulzus a vizsgált térfogaton belül más és más. Mindezeket figyelembe véve a kapott béta-spektrum tényleg csak első közelítésnek tekinthető.

Most röviden foglaljuk össze, hogy milyen összetevők alapján jellemezhető a teljes bomlási valószínűség:

- vezető rendben a lehetséges végállapot sűrűség: $\rho(E)$;
- az elektron megtalálási valószínűsége a magon belül: $\int |\psi_e|^2 dV_e$;
- a neutrínó megtalálási valószínűsége a magon belül: $\int |\psi_\nu|^2 dV_\nu$;
- egy speciális faktor, amely egy részletesebb (magátmeneteket is leíró) elméletből származtatható, ez a faktor nem függ a neutrínó és az elektron közti energia megoszlásától (értelemszerűen).

Az első és az utolsó pont triviális. Az emittált részecskék magon belüli megtalálási valószínűségének jelentősége elsősre nem biztos, hogy érthető. Ezek a tagok ugyanis az inverz béta-bomlás esetén fordulnak elő, azaz amikor a V térfogatú dobozba zárt elektron és neutrínó egy atommaggal kölcsönhatásba lépnek, ezzel alkotva egy új magot. Ez a fajta inverz folyamat a magreakciók általános S mátrix formalizmusában a reciprocitási tételnek feleltethető meg (azaz, hogy az időben visszafelé is végbemehetnek a folyamatok, ez általánosságban annyit jelent, hogy a kvantummechanikai reakciókban nincs kiténtetett iránya az időnek, ld. bővebben a Magreakciók elmélete c. fejezetben). A folyamatok inverz megközelítésével így plusz információkat kaphatunk a lejátszódó reakciókkal kapcsolatosan.

Ha a Coulomb-kölcsönhatástól eltekintünk, akkor az elektron hullámfüggvénye értelemszerűen a szabad részecske hullámfüggvénye lesz gömbi koordinátarendszerben:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) \sim j_l(k_e r) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

ahol $j_l(x)$ az elsőrendű szférikus Bessel-függvény, k_e a szabad elektron hullámszáma. A magon belüli tartományra igaz, hogy $k_e r \ll 1$, ebben az esetben a hullámfüggvény közelíthető:

$$j_l(k_e r) \sim (k_e r)^l \quad \text{ha } k_e r \ll 1.$$

A fenti közelítésnek akkor lesz maximális értéke, ha $l=0$, hiszen ezzel a hatvány értéke 1. Ez viszont egyet jelent a hullámfüggvény maximumával is, amelyből következik, hogy a magon belüli megtalálás valószínűsége is maximális lesz. A folyamat időbeli inverziójából pedig következik, hogy ebben az esetben maximális a bomlás valószínűsége is!

Az eredményekből látható, hogy a legvalószínűbb átmenet a nulla impulzusmomentum esetén valósul meg (a lehetséges pályamomentumokra vonatkozó pontos átmeneteket a Konopinsky ft érték adja meg, ld. később). A lehetséges átmeneteknek azokat az eseteket tartjuk, amelyekben mind az elektron, mind a neutrínó pályamomentuma nulla ($l_e=l_\nu=0$). Abban az esetben, ha valamelyik részecske pályamomentuma nullától különböző már tiltott átmenetről beszélünk. Láthatjuk, hogy a kétrészecskés rendszer (elektron+neutrínó) pályamomentuma szintén nulla, viszont a spin már nem feltétlenül. Tudjuk, hogy az elektron fermion úgy, mint a neutrínó is méghozzá feles spinnel ($s = 1/2$), ezért a belőlük képzett rendszer spinje az $SU(2)$ csoportnak megfelelően két lehetséges irreducibilis ábrázolásra bontható:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\right) = (0) \oplus (1).$$

Egy adott s spinnel jelölt állapot $(2s+1)$ -szeresen degenerált, így az $s = 0$ állapot singlett, mivel nem degenerált, míg az $s = 1$ triplet, mivel 3-szorosan degenerált $(+1, 0, -1)$.

Vegyük azt az esetet, hogy az emittált elektron és neutrínó rendszer singlett állapotban van. Ekkor a rendszer spinje úgy ahogy annak z - komponense is 0, ezért a teljes impulzusmomentumban, amely nem más, mint a spin és a (pálya) impulzusmomentum összege, csak az utóbbi adhat járulékot, viszont a fentiekben tárgyaltak szerint csak az a megengedett átmenet, amikor mindkét részecske pályamomentuma 0. Ebből következik, hogy a singlett átmenet (bomlás) során teljes impulzusmomentum nem változik:

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{L}_{e\nu} + \mathbf{S}_{e\nu} = 0,$$

az indexek az emittált részecskékre utalnak, hiszen a bomló mag impulzusmomentumának változást pont ezek a részecskék okozzák. Ez az átmenetet *Fermi átmenetnek* nevezik, ill. az ehhez tartozó kiválasztási szabály *Fermi kiválasztási szabálynak*.

Abban az esetben, amikor a bomlási végállapot triplet állapotban van, akkor a mag teljes impulzusmomentum változását az elektron és neutrínó spinje hordozza, mivel a megengedett átmenetben a pályamomentum ezen részecskékre nulla. Ezzel a triplet emisszió megengedett átmenetének kiválasztási szabálya:

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{L}_{e\nu} + \mathbf{S}_{e\nu} = \mathbf{S}_{e\nu} = \pm 1, 0,$$

ezt az átmenetet nevezik *Gamow-Teller átmenetnek*. A paritás operátora nem tartalmazza a spint, ezért a siglet és triplet átmenet paritás szempontjából azonosan viselkednek. Mivel a két említett átmenetben nem változik meg a mag pályamomentuma, következik, hogy a mag paritását sem változtatja meg a béta-bomlás. Fontos megjegyezni, hogy a fenti megállapítások nem relativisztikus közelítésben igazak. Amennyiben a részecskéknak relativisztikus energiával rendelkeznek, a pálya- és a saját-impulzusmomentum közti különbség „elmosódik”, azaz a 4 komponensű Dirac-spinor (fermionok hullámfüggvénye) „kis” és „nagy” komponenseinek nagysága azonos nagyságrendbe kerül. Ekkor csak a mag paritása, ill. teljes impulzusmomentuma a jó kvantumszám. Viszont ebben a limesben is kimutatható, hogy a bomlásnak két lehetséges típusa van, amely megfeleltethető a nem relativisztikus Fermi és Gamow-Teller átmenetnek.

Az eddigi fejezetünk során egyszerű feltételezésekkel sikerült kvalitatív ismereteket szereznünk a béta-bomlásban keletkező töltött részecske spektrumáról, valamint a megengedett átmenetek jellegéről. Az alkalmazott közelítések azonban túl sok olyan elemet tartalmaznak, amelyek fontos (megfigyelhető) effektusokat kizárnak az elméletből. Az egyik ilyen hatás, hogy az emittált béta-részecske spektruma függ az elektromos töltés előjelétől: pozitív töltés spektruma a magasabb impulzusokhoz tolódik és minden esetben a negatív részecske spektruma alá kerül. Ez a jelenség csak akkor magyarázható meg, ha az elektron hullámfüggvényében figyelembe vesszük a nukleonnal való Coulomb-kölcsönhatást. Ezt trükkösen egy szorzófaktor segítségével vezetjük be:

$$|\psi_e(0)|_{free}^2 \rightarrow F(Z, E) |\psi_e(0)|_{free}^2 \quad \text{ahol } F(Z, E) = \frac{|\psi_e(0)|^2}{|\psi_e(0)|_{free}^2},$$

ahol a *free* index nélküli hullámfüggvény a Coulomb-kölcsönhatást tartalmazó állapotot írja le. A korrekció fenti módszerrel történő figyelembevételének két praktikus oka van: egyrészt a magon belüli megtalálási valószínűséget a hullámfüggvény abszolút érték négyzetével határozhatjuk meg (ezért definiáljuk az $r = 0$ helyen felvett függvényértékekkel), így az $F(Z, E)$ függvénnyel könnyen pontosíthatjuk a tiltott és megengedett átmenetek szabályait; másrészt a spektrum megváltozása is könnyen tárgyalható. Az általánosan igaz, hogy az $F(Z, E)$ függetlenül attól, hogy relativisztikusan vagy nem-relativisztikusan írjuk fel a kölcsönhatási hullámfüggvényt az elektron emisszió valószínűségét növeli, míg a pozitron emisszió valószínűségét csökkenti. A módosító hatás természetesen nagy energiákon egyre kevésbé jelentkezik, a valószínűség tart a Coulomb-kölcsönhatás nélküli esethez. A fenti effektus szemléletesen is megérthető: mivel az elektron és a pozitron tömege azonos, ezért ugyanakkora impulzussal

emittálódnak a magból, viszont a Coulomb-kölcsönhatás miatt a pozitív mag gyorsítja a pozitront, míg lassítja az elektront. Ezért a pozitron spektrumában sokkal kevesebb részecske jelenik meg a kis impulzusú tartományban. A korrigált spektrum a következő alakban írható fel:

$$P(p) dp = CF(Z, E)p_e^2(E_0 - E_e)^2 dp,$$

az így meghatározott spektrum valóban rendelkezik a fent említett tulajdonsággal. Az $F(Z, E)$ függvény részleteiről a B appendixben beszélünk!

Még fontos megjegyezni, hogy $P(p)$ spektrum közvetlen módszerrel is mérhető mágneses tér segítségével, amelyre ezért van szükség, hogy a különböző kinetikus energiával kilépő béta-részeket meg lehessen különböztetni egymással. A mérés érdekessége abban áll,

hogy a nem a részecskeszámot ábrázolják, hanem a $\sqrt{\frac{P(p)}{Fp^2}}$ mennyiséget az energia

függvényében, ennek az a nagy előnye, hogy a mérési eredmények karakterisztikájának egyenesnek kell lennie, amely így könnyen analízálható, valamint extrapolációval az E_0 is meghatározható. A módszert először Kurie használta, ezért Kurie-plot-nak nevezik az ábrázolás ezen módját. Albert és Wu ezzel a módszerrel mérték és analizálták az S^{35} béta-spektrumát, amely az elmélettel nagy pontossággal egyezett, ezzel igazolva a modell alkalmazhatóságát.

1.5.2. Felezési idő, tulajdonságok, ft érték

Eddig egyszerű megfontolásokkal sikerült meghatároznunk a spektrumot, ill. a Coulomb kölcsönhatás okozta effektusokat. Ebből az egyszerű képből meghatározhatjuk az időegységre eső teljes bomlási valószínűséget is. Ehhez nem kell mást tennünk, mint a $P(p)$ spektrumot integrálni az összes lehetséges béta-impulzusra:

$$\frac{\ln 2}{t_-} = C \int_0^{p_0} F(Z, E)p^2(E_0 - E)^2 dp = Cf_-(Z, E_0),$$

ahol

$$p_0 = \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m^2 c^2},$$

ill. a negatív index a béta-részecske töltésére utal (mint tudjuk az $F(Z, E)$ töltésfüggő függvény). A fentiekkel analóg módon képezhető a béta-plusz részecskére vonatkozó bomlási valószínűség:

$$\frac{\ln 2}{t_+} = C \int_0^{p_0} F(Z, E)p^2(E_0 - E)^2 dp = Cf_+(Z, E_0).$$

A bomlási állandókban szereplő integrálok analitikusan nem oldhatók meg, ezért numerikus módszert kell alkalmazni a megoldáshoz. Az érdekesség az, hogy a két típusú felezési idő nem egyezik meg! Azt mondhatjuk, hogy általánosságban a pozitron emisszió energetikailag valószínűbb folyamat, mint az elektron kibocsátás.

A béta-bomló magok általában alapállapotban vannak a bomlási folyamat elején, ezzel szemben a gamma sugárzó magok kezdeti állapota gerjesztett, ebből már következik is, hogy a gamma emisszió valószínűbb folyamat, mint a béta-bomlás. Ez alól a szabály alól kivétel az, amikor a kezdeti állapot izomer állapot. A béta-bomlás egy másik fontos tulajdonsága, hogy a végállapot lehet gerjesztett vagy alapállapot is (komplex bomlás). Így amikor egy adott kezdeti állapotban lévő mag bomlási valószínűségét keressük, akkor az nem lesz más, mint a komplex bomlásban lévő összes lehetséges átmenet valószínűségének összege. Ha például a β^+ és a β^- bomlás is komplex, akkor a megfigyelhető spektrum a különböző lehetséges átmenetek spektrumának szuperpozíciója lesz.

Mivel a béta-bomlás több különböző úton mehet végbe (β^+ , β^- , K-befogás), valamint a bomlás során a végállapotok energiája is sokféle lehet (alapállapot, gerjesztett állapot), ezért érdemes bevezetni egy olyan mennyiséget, amely ezen tulajdonságok alapján jellemzi a bomlást. Ez a mennyiség a „comparative” (viszonylagos) felezési idő (ft):

$$ft = \begin{cases} \equiv f_-(Z, E_0)t & \beta^- \text{ – bomlás esetén;} \\ \equiv [f_+(Z, E_0) + f_K(Z, E_0)]t & \beta^+ \text{ – bomlás esetén;} \\ \equiv f_k(Z, E_0)t & K \text{ – befogás esetén,} \end{cases}$$

ahol t az átmenet felezési ideje. Amennyiben a bomlás komplex, abban az esetben a t az a parciális felezési idő, amelyre vonatkozólag meg akarjuk kapni az ft értéket. Azokban az átmenetekben, melyekben a magok hasonlóak, ez a viszonylagos felezési idő ugyan az (míg a valódi felezési idők valószínű, hogy különböznek egymástól, hiszen az elérhető maximális energia E_0 és a Z is különböző lehet). Viszont a nagy ft érték azt eredményezi, hogy a magátmenet szerkezetileg nem valószínű! Az ft érték bevezetésének egy másik fontos aspektusa, hogy ezen keresztül lehetőség nyílik a különböző átmenetek egy tágabb osztályzására. Mint az előző alfejezetben láthattuk, hogy erős közelítések mellett, az S mátrix unitaritását felhasználva az $l=0$ átmenetet neveztük megengedett átmenetnek (Fermi és Gamow-Teller átmenet). Ezt a halmazt most a viszonylagos felezési idővel bővíthetjük. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy $3 < \log_{10}(ft) < 6$ akkor megengedett átmenetről beszélünk. Ha a bomlások számát nézzük a $\log_{10}(ft)$ függvényében akkor ez az a tartomány, ahol maximumot tapasztalunk (kellene egy ábra). A $\log_{10}(ft) > 6$ tartományon szintén tapasztalható bomlás azonban ezek olyan ritkán fordulnak elő, hogy ezeket tiltott átmeneteknek tekintjük. Természetesen ezen belül is lehet csoportosítani aszerint, hogy milyen időskálán lehet bomlás, pl. $6 < \log_{10}(ft) < 10$ tartomány az un. első tiltott átmenet, $10 < \log_{10}(ft)$ második, ill. magasabb rendű tiltott átmenet.

1.5.3. Fermi aranyszabály és a mátrixelemek

A béta-bomlás elméletét először Fermi dolgozta ki az aranyszabály, ill. az ezzel együtt járó mátrixelem felhasználásával. Az elméletet a mag és az elektromágneses tér kölcsönhatásának leírásával analóg módon építette fel (az említett kölcsönhatás általános leírását Dirac adta meg). Mint tudjuk az időegységre eső átmeneti valószínűséget a Fermi aranyszabály határozza meg:

$$T = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{if}|^2 \rho(E),$$

ahol H_{if} a kölcsönhatási operátor mátrixelem a kezdeti és végállapotok között, $\rho(E)$ a végállapotok energiaegységre eső sűrűsége. A kérdéses mátrixelem az elektromágneses kölcsönhatás esetén jól definiált, mivel az operátor a skalár- és a vektorpotenciál ismeretében jól definiált, ill. a kezdeti és végállapotok is adottak (nukleon+foton). A béta-bomlás esetében a végállapotok sűrűségét már meghatároztuk

$$\rho(E_0) = \frac{V^2}{16\pi^5 \hbar^6} p_e^2 \frac{(E_0 - E_e)^2}{c^3} dp_e d\Omega_{e\nu},$$

elhanyagolva a mag és az emittált béta-részecske közti Coulomb-kölcsönhatásból származó impulzusjárulékot. Azonban ez nem okoz problémát, mert a már említett $F(Z,E)$ függvény felhasználásával már megoldottuk ezt a problémát.

A fő feladat az átmeneti mátrixelem felírása. Ez nem triviális probléma, hiszen ehhez a kölcsönhatáshoz nem tudunk egyértelmű potenciált rendelni, mint az elektromágneses folyamatok esetében. Fermi ezt a problémát úgy oldotta meg, hogy a keresett mátrixelemet formailag azonos alakban írta fel a Dirac-féle mátrixelemmel:

$$H'_{if} = \sum_n \int F(\mathbf{r}_n) (\Phi_f^* \mathbf{K}_n \Phi_i) d\mathbf{r},$$

ahol $F(\mathbf{r})$ egy olyan mennyiség, amely függ a bomlás során emittált „mezőktől”, azaz az elektron és a neutrínó hullámfüggvényétől a bomlást elszenvedő n -ik nukleon helyén, \mathbf{K}_n egy operátor, amely az n -ik nukleont csatolja a bomláshoz, a Φ függvények a kezdeti és végállapotot leíró állapotfüggvények. Vegyük észre, hogy a fentiek szerint megadott mátrixelem azonos a Dirac mátrixelemmel, amennyiben F helyére az \mathbf{A} vektorpotenciált, \mathbf{K}_n helyére pedig a \mathbf{j} áramot írjuk. A továbbiakban ezeket az $F(\mathbf{r})$ és \mathbf{K}_n operátorokat az analógiák alapján építjük fel. Ez az út azonban messze nem olyan egyszerű, mint gondolnánk, hiszen az elektromágneses kölcsönhatás esetén a kvantumos leírás alapja a klasszikus elmélet kvantálása, viszont a béta-bomlás mögött nincs semmilyen klasszikus elmélet!

Az elektromágneses analógiára támaszkodva az $F(\mathbf{r}_n)$ -nek az elektront és a neutrínót leíró mezők lineáris függvényének kell lenni. Jelölje a keletkezett elektronok hullámfüggvényét a $\phi_e(\mathbf{r}_e)$, míg a neutrínót a $\phi_\nu(\mathbf{r}_\nu)$. Mindkét hullámfüggvény a feles spin következtében 4 komponensű Dirac-spinorral írható le. A spinor tereket (függvényeket) tartalmazó operátorokra anti-kommutációs reláció vonatkozik, azok így nem teljesítik a lokalitási feltételt. Viszont a funkcionálanalízisből ismert tétel szerint, az antikommutáló operátorokból képzett kettős szorzatoperátorok kommutátora már nulla. Ezt kihasználva készíthetünk kommutál operátort, úgy hogy spinor terekből bilineárisokat képezünk. Így az $F(\mathbf{r}_n)$ kifejezhető bilineárisok lineáris kombinációiként:

$$F(\mathbf{r}_n) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi_{ei}^*(\mathbf{r}_n) \xi_{ij} \phi_{\nu j}(\mathbf{r}_n),$$

ahol az i és j összegzés az egyes spinorok komponenseire vonatkozik, valamint a ξ_{ij} egy lineáris operátor. A kifejezésben a hullámfüggvények adjungáltjai jelennek meg, mivel az elektron és a neutrínó a végállapotban léteznek csak, ezért a mátrixelemnek megfelelően kell őket kezelni. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ξ_{ij} operátorok nem tartalmaznak deriváltakat. Ez ekvivalens azzal a feltételezéssel, hogy azok az elektron-neutrínó és mag közti kölcsönhatások, melyek függenek a könnyű részecskék

impulzusától, ki vannak zárva, így az egyes ξ_{ij} komponensek megfeleltethetők számoknak. Ekkor alkalmazhatjuk a következő komplex jelölést:

$$F(\mathbf{r}_n) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi_{ei}^*(\mathbf{r}_n) \xi_{ij} \phi_{vj}(\mathbf{r}_n) = \{\phi^*(\mathbf{r}_n) \xi \phi(\mathbf{r}_n)\}.$$

Az elektromágneses kölcsönhatásnál az elektromágneses teret leíró \mathbf{A} vektorpotenciál kvantummechanikai értelmezésében a doboz kvantálást alkalmaztuk, melyben azt használtuk ki, hogy a vizsgált V térfogatban egy foton van jelen és az hordozza a teljes energiát. Jelen esetben az analóg gondolatmenet értelmében, az F függvényben szereplő elektron és neutrínó hullámfüggvényeket kell úgy normálnunk, hogy a vizsgált V doboztérfogatban egy elektron és egy neutrínó legyen.

A K_n operátor a mag kezdeti és végállapotát leíró hullámfüggvények között jelenik meg. A változás a nukleonban abban áll, hogy egy proton neutronná, vagy egy neutron protonná alakul. Emiatt a K_n operátornak magában kell foglalnia egy olyan komponenst, mely ezt az átalakulást figyelembe veszi. Ennek egy triviális leírása az izospinnel lehetséges. Mint tudjuk a proton és a neutron egy izospin dublettet ($T=1/2$) alkot, vezessük be a különböző (irreducibilis) állapotok vetítés operátorait:

$$\begin{aligned} \tau_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \tau_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \tau_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \tau_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

A fent bevezetett izospin transzformációs operátorokkal kifejezhetjük a nukleoncserét, ezzel az n -ik nukleonra vonatkozó K_n operátor a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} K_n &= \tau_{n,-} K'_n; \\ K_n &= \tau_{n,+} K'_n; \end{aligned}$$

ahol az indexekben megjelenő n az adott, kölcsönhatásban résztvevő nukleonra vonatkozik. Természetesen itt is jogos feltevés, hogy a megjelent redukált K'_n operátor nem tartalmaz deriváltakat, mely azzal van kapcsolatban, hogy a kölcsönhatás nem függ a kezdeti és végállapotban lévő nukleonok impulzusától.

A keresett mátrixelem további kifejtése attól függ, hogy relativisztikusan vagy nem relativisztikusan tárgyaljuk a problémát. Alapvető jelentősége a hullámfüggvények spin függő részében van, hiszen a nem-relativisztikusan kezelt esetben 2 komponensű Pauli spin-függvényeket, míg a relativisztikus esetben 4 komponensű Weyl-spinorokat használunk.

1.5.3.1. Mátrixelem a nem-relativisztikus határesetben

A nem-relativisztikus leírás azért tekinthető csupán határesetnek, mert a valóságban a β -bomlás sosem tekinthető nem-relativisztikus folyamatnak. Ennek azaz egyszerű oka, hogy a leptonszám-megmaradás miatt kilépő neutrínó vagy antineutrínó nyugalmi energiája mindig jóval kisebb, mint a mozgási energia, azért a részecske viselkedése inkább az ultra-relativisztikus esettel közelíthető. Ezek ellenére már a nem-relativisztikus esettel is

könnyen ismertethető a gondolatmenet, mellyel bonyolultabb esetekben is meghatározható az átmeneti mátrixelem.

Az alkalmazott közelítésben feles spinű részecskékkel dolgozunk, ezért a kölcsönható mezőket 2 komponensű Pauli-spinfüggvényekkel reprezentálhatjuk. A mátrixelem végállapot tartalmazó komponensét már az előző szakaszban ismertetett módon bilineárisokkal fejtettük ki:

$$F = \{\phi_e^*, \xi \phi_v^*\},$$

ahol a $\{\}$ zárójel a spin indexekre való összegzést jelenti (jelen esetben $i,j=1,2$). Mint tudjuk, két feles spinű részecskéből álló rendszer irreducibilis reprezentációja az $s = 0,1$ állapot. Mikor az $s = 0$, akkor az állapot nem degenerált, tehát szingulett állapotot kapunk, mely a Pauli-spinfüggvényekkel kifejezve a következő anti-szimmetrikus állapotot adja:

$$F_s = \phi_{e1}^* \phi_{v2}^* - \phi_{e2}^* \phi_{v1}^* = \{\phi_e^*, \mathbf{B} \phi_v^*\}, \text{ ahol } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A szingulett állapothoz tartozó F_s egy egykomponensű skalár, melyből következik, hogy invariáns a koordinátarendszer forgatására. Ennek fontosságára az alfejezet végén még visszatérünk. Az $s = 1$ állapot már degenerált, a degeneráció foka $(2s+1) = 3$. Az ezeknek megfelelő szimmetrikus állapototok:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{2} \phi_{e1}^* \phi_{v1}^* = \{\phi_e^*, \sigma_1 \mathbf{B} \phi_v^*\} \\ F_0 &= \phi_{e1}^* \phi_{v2}^* + \phi_{e2}^* \phi_{v1}^* = \{\phi_e^*, \sigma_0 \mathbf{B} \phi_v^*\} \\ F_{-1} &= \sqrt{2} \phi_{e2}^* \phi_{v2}^* = \{\phi_e^*, \sigma_{-1} \mathbf{B} \phi_v^*\} \end{aligned}$$

ahol a σ_i mátrixok a Pauli-mátrixokból képzett un. szférikus komponensek, melyek szférikus vektort alkotnak:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + i\sigma_y), \sigma_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x - i\sigma_y), \sigma_0 = \sigma_z.$$

A szférikus komponensekkel kifejezett F_i tagok (spin z irányú vetületei) vektor formában is felírhatók:

$$\bar{F} = \{\phi_e^*, \bar{\sigma} \mathbf{B} \phi_v^*\}$$

A kompakt formában megadott F vektor a Pauli-mátrixokból képzett lineárkombinációk miatt szférikus vektornak tekinthető, 3 komponenssel. (Ebből érthető meg, hogy az 1-es spinű részecskéket miért reprezentálják vektorként). Felmerülhet a kérdés, hogy miért jó a szférikus vektorok használata. Ennek a magyarázata egyszerű, mint láttuk a szingulett állapotú rendszer skalárként reprezentálható, így invariáns a forgatással szemben, ebből következően a triplett állapotnak is rendelkezni kell ezzel az szimmetriával. Egy vektor szférikus komponensekkel kifejezett formája rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, a forgatással szemben úgy viselkednek a komponensei, mint az Y_{lm} gömbfüggvény. Mielőtt továbblépnénk meg kell vizsgálni, hogy a szférikus vektorok skalárszorzata miként

állítható elő. Legyen \mathbf{A} szférikus vektor, ekkor a komponensei a Descartes-komponensekből előáll, mint

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y), \\ A_0 &= A_z, \\ A_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y), \end{aligned}$$

valamint legyen \mathbf{B} is szférikus vektor. Az \mathbf{AB} skalárszorzat definíció szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \sum_{\mu=-1}^1 (-1)^\mu A_\mu B_{-\mu}, \\ \mathbf{A}^* \mathbf{B} &= \sum_{\mu=-1}^1 A_\mu^* B_\mu. \end{aligned}$$

Az előzőekben megtaláltuk az átmeneti mátrixelem F komponensének nem-relativisztikus alakját, mely $s=0$ szingulett állapotban skalárként áll elő a \mathbf{B} mátrixszal, míg az $s=1$ tripllett szférikus vektorként a $\overline{\sigma}\mathbf{B}$ szorzattal. Általánosan elmondhatjuk, hogy a teljes átmeneti mátrixelemnek skalárnak kell lennie, ebből következően a mátrixelem $\phi_f^* K_n \phi_i$ tagja aszerint, hogy szingulett vagy tripllett végállapotról van szó különbözőnek kell lennie. Amennyiben szingulett átmenetről van szó F_s skalár, ezért a mátrixelem invarianciájához $\phi_f^* K_n \phi_i$ -nek szintén skalárnak kell lennie, ha viszont tripllett átmenet történik akkor a $\phi_f^* K_n \phi_i$ elemnek az \overline{F} -hez hasonlóan szférikus vektornak kell lennie. Az említett tulajdonságok a K_n alkalmas megválasztásával könnyen teljesíthetők. A legegyszerűbb választás a következő:

$$\begin{aligned} \text{ha } F_s &\Rightarrow K_n = 1; \\ \text{ha } \overline{F} &\Rightarrow \overline{K}_n = \overline{\sigma}_n; \end{aligned}$$

Ezek alapján a szingulett (avagy Fermi) átmenet mátrixeleme a következő:

$$H'_{if} = G_s \sum_{n=1}^A \int \{ \phi_e^*, \mathbf{B} \phi_v^* \} \{ \phi_f^* \tau_{n\pm} \phi_i \} d^3 r_n,$$

míg a tripllett (Gamow-Teller) átmenet mátrixeleme:

$$H'_{if} = G_F \sum_{n=1}^A \int \{ \phi_e^*, \overline{\sigma} \mathbf{B} \phi_v^* \} \{ \phi_f^* \overline{\sigma}_n \tau_{n\pm} \phi_i \} d^3 r_n = G_F \sum_{n=1}^A \sum_{\mu=-1}^1 (-1)^\mu \int \{ \phi_e^*, \sigma_\mu \mathbf{B} \phi_v^* \} \{ \phi_f^* \sigma_{n,-\mu} \tau_{n\pm} \phi_i \} d^3 r_n,$$

ahol a $\tau_{n\pm}$ a kezdeti n -ik nukleon izospin állapotát változtatja meg, aszerint, hogy milyen típusú β -bomlásról van szó. A fenti módon meghatározott mátrixelemek az impulzuszómomentum-megmaradást biztosítják, a skalár és szférikus vektor reprezentáció miatt a pályamomentum nem változik, viszont ezek egyúttal a spin-megmaradást is megvalósítják. Ehhez vizsgáljunk meg egy konkrét esetet. Legyen a végállapotban lévő

elektron és antineutrínó egyaránt „up” spinállapotban, ekkor a Pauli-spinfüggvények közül csak az $u_{e1} \neq 0$ és $u_{\nu 1} \neq 0$. Ebben az esetben a Gamow-Teller átmenet valósulhat meg, mert az $m = 1$ vetületű triplett állapot ad csak nem eltűnő járulékot, így a triplett mátrixelemben lévő összeg csak egy tagból áll:

$$H'_{if} = G_F \sum_{n=1}^A (-) \int \{ \phi_e^*, \sigma_1 \mathbf{B} \phi_\nu^* \} \{ \phi_f^* \sigma_{n,-1} \boldsymbol{\tau}_{n\pm} \phi_i \} d^3 r_n,$$

Vegyük észre, hogy az integrálban lévő első tagban a σ_1 átfordítja a spint az „up” állapotba, míg a második tagban az adott bomlást elszenvedő n -ik nukleon spinjét pedig a σ_{n-1} átfordítja „down” állapotba, tehát a teljes spin változatlan marad!

Az átmeneti mátrixelemeket tovább lehet bontani, ha a kimenő részecskéket síkhullámokkal írjuk le:

$$\phi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} u_e e^{i\vec{k}_e \vec{r}}, \quad \phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} u_\nu e^{i\vec{k}_\nu \vec{r}},$$

ahol V normálási térfogat u függvények az egyes részecskék Pauli-spinfüggvényeik. Ezzel az F komponens

$$F = \begin{cases} F_s = \frac{G_s}{V} \{ u_e^*, \mathbf{B} u_\nu^* \} e^{-i(k_e+k_\nu)r_n} \\ \bar{F} = \frac{G_s}{V} \{ u_e^*, \bar{\sigma} \mathbf{B} u_\nu^* \} e^{-i(k_e+k_\nu)r_n} \end{cases}$$

Az exponenciális függvények kifejezhetők gömbfüggvények segítségével:

$$e^{-i(\vec{k}_e+\vec{k}_\nu)\vec{r}_n} = 4\pi \sum_l \sum_{m=-l}^l i^l j_l((k_e+k_\nu)r_n) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

ahol az l nem más mint a teljes elektron-neutrínó rendszer pályamomentuma. Az exponensben a nukleonok helyvektora szerepel, így a skalárszorzat jó közelítéssel: $(k_e+k_\nu)r_n \ll 1$, ebben az esetben a jobb oldali összegzés legnagyobb járulékat az $l=0$ eset adja. Emlékezzünk vissza az inverz folyamat gondolatmenetéből pont erre a megállapításra jutottunk. A vizsgált közelítés mellett, az $l=0$ esetre a következőt kapjuk:

$$e^{-i(\vec{k}_e+\vec{k}_\nu)\vec{r}_n} \cong 1,$$

Így a mátrixelemek egyszerű alakban adhatók meg:

$$H'_{if} = \frac{G_s}{V} \{ u_e^*, \mathbf{B} u_\nu^* \} \langle 1 \rangle \quad \langle 1 \rangle = \sum_A \int \phi_f^* \tau_{n\pm} \phi_i d^3 r_n,$$

$$H'_{if} = \frac{G_F}{V} \{ u_e^*, \bar{\sigma} \mathbf{B} u_\nu^* \} \langle \bar{\sigma} \rangle \quad \langle \bar{\sigma} \rangle = \sum_A \int \phi_f^* \bar{\sigma}_n \tau_{n\pm} \phi_i d^3 r_n.$$

2 Magerők

2.1. Általános áttekintés, tulajdonságok

Az atommagban igen kis térrészben vannak összezsúfolva a nukleonok. A protonoknak elektromos töltése van, emiatt erősen taszítják egymást. Felvetődik a kérdés, hogyan maradhatnak együtt az egymást igen erősen taszító részecskék? A válasz nyilvánvaló: léteznie kell egy *erős, vonzó kölcsönhatásnak*, amely rövid hatótávolságú és az elektromos taszítás ellenére is össze tudja tartani az atommagot. Ez az erős, vonzó kölcsönhatás a *magerő*. Alapvető tulajdonságai a következők (kísérletekkel igazolt eredmények):

- erős, vonzó: a protonok taszító Coulomb-potenciálja ellenére képes a nukleonokat összetartani az atommagban, az *erős* jellege azzal van kapcsolatban, hogy kölcsönhatást jellemző időskála (magidő, $\tau \sim 10^{-24}$ s) nagyon kicsi.
- van rövid távú taszító törzs: erre a tulajdonságra az atommagok központi sűrűségének állandóságából következtethetünk. Hiába adunk egy atommaghoz egyre több és több nukleont, a központi sűrűség nem növekszik. Ezt csak részben lehet magyarázni a magerők rövid hatótávolságával. Pontosabb vizsgálatok megmutatják, hogy ehhez a telítődéshez az szükséges, hogy a magerőknek legyen egy igen rövid hatótávú taszító törzse, amely nem engedi a nukleonokat túl közel kerülni egymáshoz
- rövid hatótávolságú (hatótávolsága néhány fm. $\approx 10^{-15}$ m)
- nem tesz különbséget a nukleonok között (elektromos töltéstől független)
- spinfüggő: erre mind a deuteron szingulet állapotának hiánya, mind pedig a neutron-proton szóráskísérletekben a szingulet és triplet szórási hosszak igen nagy különbözősége a bizonyíték.
- nem centrális: A deuteron vizsgálata során az anomális mágneses momentum és a kvadrupólus momentum értelmezésekor fel kellett tételezni, hogy az alapállapot nem tiszta $L = 0$ állapot, hanem a pályamomentum szerint kvantummechanikai „kevert” állapot. Klasszikus fizikából ismert, hogy centrális potenciál esetén a pályamenti keringés impulzusmomentuma mozgásállandó. Ennek kvantummechanikai megfelelője az, hogy centrális potenciál esetén az L^2 és az L_z operátorok felcserélhetők a Hamilton-operátorral, azaz a pályamomentum kvantumszámjai a rendszer sajátértékei, és minden állapotban pontosan meghatározhatók. Az a tény, hogy a deuteronnál olyan állapotfüggvényt kellett bevezetni, amelyben az L kvantumszám nem határozható meg pontosan (hiszen 96% valószínűséggel $L = 0$ és 4% valószínűséggel $L = 2$) úgy értelmezhető, hogy a protont és a neutront összetartó potenciál ***nem centrális*** !

A magerő első komolyabb fizikai modellje a Yukawa-elmélet. Az elmélet lényegi alapjait egyszerű kvantummechanikai megfontolások alapján meghatározhatjuk. A Yukawa modell szerint a nukleonok kis részecskéket - ún. mezonokat - dobálnak egymásnak, "cserélnek" ki, s ez a mezon csere addig valósulhat meg, míg a nukleonok elegendően közel vannak egymáshoz.

Első pillanatban lehetetlennek tűnik Yukawa elképzelése: honnan jönnek ezek a mezonok? A nukleonokban nem lehetnek benne a Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés miatt, ahogyan nem lehetnek elektronok sem az atommagban. Yukawa szerint a mezonok a kölcsönhatás pillanatában születnek! Vajon honnan lesz energia ahhoz, hogy új tömeg szülessen, hiszen m tömeg létrehozásához $E = mc^2$ energiára van szükség?! A meglepő megoldást a kvantummechanika adja. A kvantummechanika szerint rövid ideig létező rendszer energiája nem határozható meg teljesen pontosan, van egy energiabizonytalansága: $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$. Ez az energiára és időre vonatkozó Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés.

Tegyük fel, hogy a két kiszemelt nukleon egymástól d távolságra van. Ha d eléggé kicsiny, akkor az egymásnak „átdobott” mezon csak nagyon rövid ideig repül. Tegyük fel azt is, hogy a mezon

(majdnem) fénysebességgel repül, ekkor azaz idő, amíg a mezonnak léteznie kell: $\Delta t = \frac{d}{c}$. Ilyen rövid ideig élő rendszerre a fenti bizonytalansági összefüggés

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar \cdot c}{d}$$

energiabizonytalanságot „engedélyez”. Ha ez nagyobb, mint a mezon létrehozásához szükséges energia, akkor ilyen rövid ideig létre is jöhet ez a mezon, és átrepülhet!

A $\Delta E > mc^2$ feltételből azt kapjuk, hogy

$$\Delta E = \frac{\hbar \cdot c}{d} > mc^2, \text{ azaz } d < \frac{\hbar}{m \cdot c}.$$

Innen látszik, hogy ez a mezoncsere csak akkor mehet végbe, ha a két részecske eléggé közel van egymáshoz.

Ha $m \approx 270 \cdot m_{\text{elektron}} = 2,46 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ értéket helyettesítünk be, $d < 1,48 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ adódik, ami éppen a magerők hatótávolságának nagyságrendje. A magerők rövid hatótávolságának az „oka” tehát a mezonok nagy nyugalmi tömege!

A következő alfejezetben ennek az elméletnek a pontos térelméleti leírását mutatjuk be.

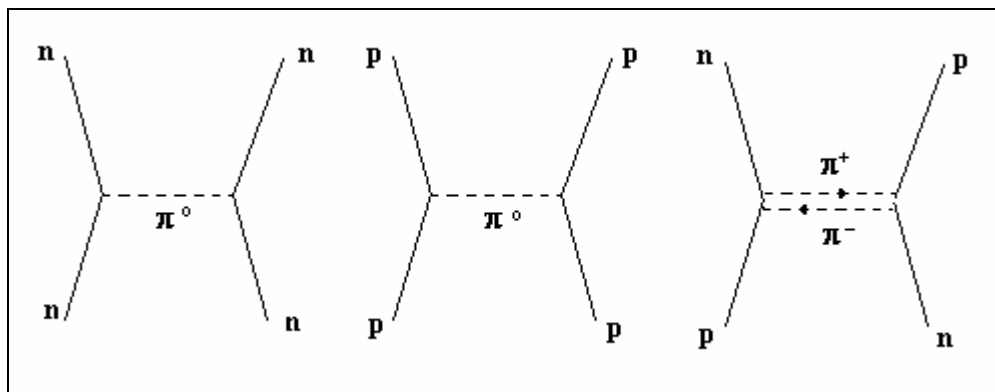
2.2. Yukawa-elmélet

Az 1920-as években a kvantummechanika megszületése után elkezdődött az alapvető, elemi kölcsönhatások leírása az új elmélettel. Az első lépés a sugárzáselmélet, a klasszikus elektrodinamika kvantumoztatása. Ehhez szükséges volt a relativisztikus jelenségeket és a feles spinű részecskéket leíró Dirac-egyenlet, amely az első térelméleti egyenletnek tekinthető. A 40-es évek végére Feynman, Schwinger, Dyson és Tomonaga munkájával, az ún. másodkvantált (vagy térkvantált) formalizmussal és gráftechnikával teljessé vált a QED (kvantumelektrodinamika) térelméleti tárgyalása.

A QED korai szakaszában - sőt már a Maxwell-egyenletekből is - következik, hogy az elektromágneses kölcsönhatás egy közvetítő részecske révén valósul meg. Ez a részecske a foton, egy 0-es spinű, nullatömegű, semleges töltésű, ún. vektorbozon. A részecskecserével megvalósuló kölcsönhatás úgy képzelhető el, hogy az egymással kölcsönható töltött részecskék egymás között „kicserélnek” egy fotont, ezzel a kölcsönhatás visszavezethető a közvetítő részecske keltés-elnyelődés folyamatára.

Yukawa ötlete a magerők leírására egy, a QED-el teljesen analóg leírás volt: a magerőt szintén részecskecserével megvalósuló kölcsönhatásnak tekintette. De milyen tulajdonságai is legyenek ennek a részecskének, hogy a magerőre vonatkozó tulajdonságok egyszerre teljesüljenek? Egyrészt tudjuk, hogy a magerők a nukleonok között hatnak, amelyek izospin dublettként reprezentálhatók, különböző töltéssel és spinnel. Így a lehetséges kölcsönhatási párok: n-n, n-p, p-n, p-p (1.1. ábra). Yukawa ezeket a hipotetikus közvetítő részecskéket mezonoknak nevezte el, mivel a számításai szerint (ld. alább) a részecske tömege az elektrontömeg és a protontömeg közé kell, hogy essen (mezosz= közbenső). Amikor a μ -mezonot felfedezték, azt hitték, hogy a Yukawa által megjósolt részecskét találták meg. Hamarosan azonban kiderült, hogy a μ -mezon nem vesz részt az erős kölcsönhatásban, így nem lehet a keresett közvetítő részecske. Nem

sokkal később megtalálták a π -mezonokat, amelyek már megfelelnek Yukawa elvárásainak.



1.1. ábra. A pioncserével megvalósuló kölcsönhatás lehetséges típusai.

Ahogy azt az 1.1. ábrán is láthatjuk a közvetítő részecskének 3 töltésállapota kell legyen. Amikor az n-n ill. p-p kölcsönhatásokat nézzük, akkor a kezdeti és a végállapotok töltése nem változik, ez a töltésmegmaradást figyelembe véve csak úgy valósulhat meg, ha elektromosan töltetlen pion közvetít. A p-n és n-p kölcsönhatások esetében már megváltozik a töltésállapot, ehhez a p-n esetben pozitív (π^+), míg n-p esetben negatív töltésű közvetítő részecske (π^-) szükséges. A töltés vizsgálata után térjünk rá a szintén kulcsfontosságú spinre. A magban lévő nukleonok kötött állapotainak fő rendező elve a Pauli-elv, amely a spin-statisztika következménye. Ahhoz, hogy a nukleonok között kialakuló kötött állapotok rendszerét megtarthassuk, csak bozon típusú (egész spinű) részecskét feltételezhetünk. A mag eredő spinjének megmaradása végett célszerű a közvetítő részecske spinjét 0-nak választani, amely az SU(2) csoport irreducibilis ábrázolásai közül skalárral reprezentálható. A keresett pion tömegére vonatkozólag azzal a feltevessel élünk, hogy a rövid hatótávolság miatt a részecskének nem lehet nulla nyugalmi tömege (ellenkező esetben végtelen lenne a kölcsönhatás hatótávolsága, mint az elektromágnesség estében, ez azonban ellentmond a tapasztalatoknak). A tömeg és hatótávolság közötti összefüggésre még a továbbiakban visszatérünk.

Összefoglalva: a magerő közvetítő részecskéje nem nulla tömegű, 3 töltésállapotú (+,-,0), 0 spinű részecske.

A folyamat leírása klasszikus kvantummechanikával nem lehetséges, hiszen a keletkezett piont nem lehet a nukleonok hullámfüggvényéhez csatolni, ugyanis a bemenet és kimenet állapotaiban nem jelenik meg (ilyen esetben a részecskét virtuális részecskének nevezzük). Ezért a QED-hez hasonlóan kvantumtérelméleti tárgyalást kell alkalmaznunk, azaz a vizsgált részecskékhez velük azonos tulajdonságú mezőket rendelünk. A továbbiakban az egységes $\hbar = c = 1$ egységrendszerben dolgozunk, $g^{\mu\nu} = (+,-,-,-)$ metrikakonvenció mellett.

Jelölje a szabad 0 spinű, töltetlen bozonteret $\phi(x)$ -vel. Ennek a skalármezőnek a mozgásegyenlete (téregyenlete) a Klein-Gordon egyenlet:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0,$$

ahol m a pion tömege. A fenti egyenlet természetesen forrás nélküli esetre vonatkozik. A mi esetünkben azonban vannak források (a nukleonok pionokat keltenek vagy nyelnek el), ezért az egyenletet módosítani kell:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = \eta(x),$$

ahol $\eta(x)$ a forrás. Az egyenletben ez nem operátor, hanem egy olyan szám, amely azt adja meg, hogy mennyi piont kelt (vagy nyel el) egy adott nukleon. A forrástag kifejtéséhez speciális közelítést alkalmazunk: a nukleonok legyenek ∞ nehezek (a pionhoz képest), ezért nincs visszalökődés az emisszió és az abszorpció közben. A forrás tehát sztatikusnak tekinthető (a helyük rögzített a tér-időben):

$$\eta(x) = \sum_n g_n \delta(x - x_n),$$

ahol g_n az x_n helyen lévő nukleon forráserőssége. Amennyiben a nukleonok kvantumosan is megkülönböztethetetlenek (az erős kölcsönhatás szempontjából), akkor egyformán kell kölcsönhatniuk, tehát a forráserősség (vagy másként a kölcsönhatás erőssége) minden nukleonra állandó, ezért a szumma elé kiemelhető:

$$\eta(x) = g \sum_n \delta(x - x_n).$$

A másodkvantálás és a Fock-tér felépítéséhez meg kell határoznunk a forrásos skalármező Lagrange-sűrűségét (Appendix A), amely az Euler-Lagrange-egyenletből következően

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \eta \phi.$$

A rendszer Hamilton-operátora

$$H = \sum_\sigma \Pi_\sigma \partial_\sigma \phi - L = H^0 + H^1,$$

ahol a konjugált mező (mint, a kanonikus impulzus)

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi.$$

A Hamilton-sűrűség a fentiek alapján felbontható két részre, egy szabad és egy kölcsönható részre, amellyel majd lehetővé válik a perturbációs számítás is:

$$H^0 = \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

$$H^1 = -\eta \phi$$

Ezek után, mint a térelméletben általában a másodkvantálás előtt a (ϕ, Π) tereket (téroperátorokat) ki kell fejeznünk azok impulzus térbeli alakjával, hiszen az keltő

eltüntető operátorok a k térben értelmezettek. Ehhez a terek Fourier-transzformációját kell vennünk:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot q_k e^{ikx}$$

$$\Pi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot p_k e^{ikx}$$

ahol q_k és p_k operátor értékű mennyiségek. A Hamilton-sűrűség önadjungáltságából és a fenti síkhullám kifejtésből következik a kifejtési operátorok alábbi tulajdonsága:

$$q_{-k} = q_k^*$$

$$p_{-k} = p_k^*$$

Ezek ismeretében elvégezhetjük a skalártér kvantálását. Az általános eljárás a kanonikus kvantálás: tekintsük a (ϕ, Π) mezők kifejtési operátorait, mint hely operátor (q_k) és impulzus operátor (p_k), és megköveteljük, hogy teljesüljön közöttük a bozon statisztikára jellemző kommutációs reláció (általános koordináta kvantálás):

$$[p_k^*, q_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta(k - k'),$$

$$[q_k, q_{k'}] = 0,$$

$$[p_k, p_{k'}] = 0.$$

Ezek ismeretében némi számítás után megadhatjuk a skalármező téroperátorainak kommutátorait:

$$[\Pi(x), \phi(x')] = \frac{\hbar}{i} \delta(x - x'),$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = 0,$$

$$[\Pi(x), \Pi(x')] = 0$$

Az általános hely és impulzus operátorok meghatározása azért praktikus, mert segítségükkel egyszerű formában meghatározható a szabad rendszer energiája. Ehhez a következő integrált (Hamilton-függvényt) kell kiszámítani:

$$E = H^0 = \int d^3x H^0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (p_k p_k^* + \omega_k^2 q_k q_k^*),$$

ahol

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}.$$

A kanonikus kvantálás után rátérhetünk a másodkvantálásra, azaz felépíthetjük a Fock-teret, amely a részecske (pion) keltő és eltüntető operátorok teljes rendszerének meghatározását jelenti. Szemléletesen ez az eljárás nem más, mint hogy az állapotteret

független oszcillátorok rendszereként kezeljük. Minden k impulzusú pionhoz rendelhető egy független oszcillátor, keltő és eltüntető operátorok segítségével. Mivel az impulzustér folytonos és végtelen, ezért a Fock-tér is végtelen dimenziós Hilbert-tér lesz. A keresett keltő (\mathbf{a}_k^+) és eltüntető (\mathbf{a}_k) operátorok szintén a bozonokra jellemző kommutációs relációkat követik:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k'}^+] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k'}] &= 0. \end{aligned}$$

A Kronecker-delta a különböző impulzushoz tartozó oszcillátorok függetlenségét jelenti. Ezzel a Fock-tér egy tetszőleges állapota könnyen felírható:

$$\frac{(\mathbf{a}_k^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n, k\rangle,$$

ahol $|0\rangle$ a Fock-tér vákuuma. Az $\mathbf{a}_k^+|0\rangle$ kelt egy k impulzusú piont a vákuumból, míg az $\mathbf{a}_k|k\rangle$ eltüntet egy k impulzusú piont. Fontos megjegyezni, hogy $\mathbf{a}_k|0\rangle=0$ minden esetben. A keltő és eltüntető operátorokkal az oszcillátorokhoz hasonlóan kifejezhetőek az általános koordináta operátorok:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^+) \\ \mathbf{p}_k &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\mathbf{a}_k^+ - \mathbf{a}_k) \end{aligned}$$

Ezekkel ismert alakra hozható az energia, ha a fenti kifejezéseket az energia képletébe helyettesítjük és kihasználjuk a kommutációs relációkat:

$$E = H^0 = \hbar \sum_k \omega_k \left(\mathbf{a}_k^+ \mathbf{a}_k + \frac{1}{2} \right) = \hbar \sum_k \omega_k \left(\mathbf{n}_k + \frac{1}{2} \right),$$

ahol \mathbf{n}_k a részecskeszám operátor. Vegyük észre, hogy a fenti képlet nem más, mint N darab független oszcillátor energiája (az N a különböző k impulzusú állapotok számát jelöli). Azonban számunkra nem a szabad pionmező energiája az igazán érdekes, hanem a perturbált rendszeré. Ehhez számítsuk ki a kölcsönhatási energijárulékot:

$$H' = \int d^3x H^I = g \sum_n \int dx \delta(x - x_n) \phi(x) = g \sum_n \phi(x_n) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} q_k \sum_n e^{ikx_n},$$

amely másodkvantált formalizmusban:

$$H' = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^+) \sum_n e^{ikx_n}.$$

Vizsgáljuk meg mit is jelent a kapott eredmény. A rendszer „szabad” energiája (H^0) nem más, mint N független oszcillátor energiája, amely értelemszerűen arányos a pionszámmal. Ez az energiajárulék nem csinál mást, mint leszámolja a szám-sajátállapotokat, azaz megadja, hogy k impulzusonként mennyi pion van a rendszerben. Ezt fejezi ki a részecskeszám-operátor:

$$\mathbf{n}_k |n, k\rangle = n |n, k\rangle.$$

A perturbált, kölcsönható Hamilton-op. (H') úgy szemléltethető, hogy megnézzük, milyen hatással van egy adott szám-sajátállapotra. Ehhez vizsgáljuk meg a következő kommutátorokat:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_k, \mathbf{a}_k] &= \mathbf{a}_k^+ [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k] + [\mathbf{a}_k^+, \mathbf{a}_k] \mathbf{a}_k = -\mathbf{a}_k, \\ [\mathbf{n}_k, \mathbf{a}_k^+] &= \mathbf{a}_k^+ [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k^+] + [\mathbf{a}_k^+, \mathbf{a}_k^+] \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k^+, \end{aligned}$$

melyek alapján egy szám sajátállapotra vett hatás:

$$\mathbf{n}_k \mathbf{a}_k |n, k\rangle = \mathbf{a}_k (\mathbf{n}_k - 1) |n, k\rangle = (\mathbf{n} - 1) \mathbf{a}_k |n, k\rangle.$$

A kapott eredmény úgy értelmezhető, hogy az $\mathbf{a}_k |n, k\rangle$ transzformált állapot is az \mathbf{n}_k sajátállapota, de a hozzá tartozó sajátérték az $(\mathbf{n}-1)$. Ez a számolás az adjungált operátorra is igaz, csak ott az $(\mathbf{n}+1)$ sajátértékű állapot jelenik meg. Ezek alapján belátható, hogy a keltő és eltüntető operátorok valóban a szám-sajátállapotokon léptetnek, tehát:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^+ |n, k\rangle &= \sqrt{\mathbf{n} + 1} |n + 1, k\rangle, \\ \mathbf{a}_k |n, k\rangle &= \sqrt{\mathbf{n}} |n - 1, k\rangle, \end{aligned}$$

A szorzófaktorok a normaszámolásból határozhatóak meg. A fenti kifejezésekből következik, hogy az $\langle k, m | H' | n, k \rangle$ mátrixelemnek csak akkor van nem eltűnő járuléka, ha $m \pm 1 = n$, ahol m, n a pion Fock-tér szám-sajátállapotai. Más szavakkal: *csak akkor van perturbált energia, ha a folyamat során 1 pion keletkezik, vagy eltűnik!* A pion emissziót leíró tag a H' kifejezésében lévő zárójel második tagja, az abszorpciót leíró rész a zárójel első tagja. Ahhoz, hogy meghatározhassuk a magpotenciált, ki kell számítanunk, hogy a pion-keltés illetve -elnyelés milyen perturbációt jelent a szabad mezőhöz képest. Ehhez a feladathoz értelemszerűen perturbációszámítást kell alkalmazni. Az időfüggetlen perturbációszámításhoz az energia egy olyan j állapotbeli mátrixelemét kell kiszámítani, ahol pion és nukleon egyszerre van jelen

$$E_j = (H^0)_j + (H')_j = \langle n_j | H^0 | n_j \rangle + \langle n_j | H' | n_j \rangle + \text{másodrendű tagok}.$$

Könnyű belátni, hogy a szabad Hamilton-operátor mátrixeleme első rendben a pionok számával arányos, hiszen a részecskeszám-operátor mátrixelemét a sajátállapotain vizsgáljuk:

$$(H^0)_j = \hbar \sum_k \omega_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right),$$

ahol N_k a k impulzusú pionok száma. Ez viszont a kölcsönhatásról nem ad információt. A kölcsönhatási Hamilton-operátor mátrixelem első rendben viszont zérus, amely a szám-sajátállapotok ortogonalitásával magyarázható:

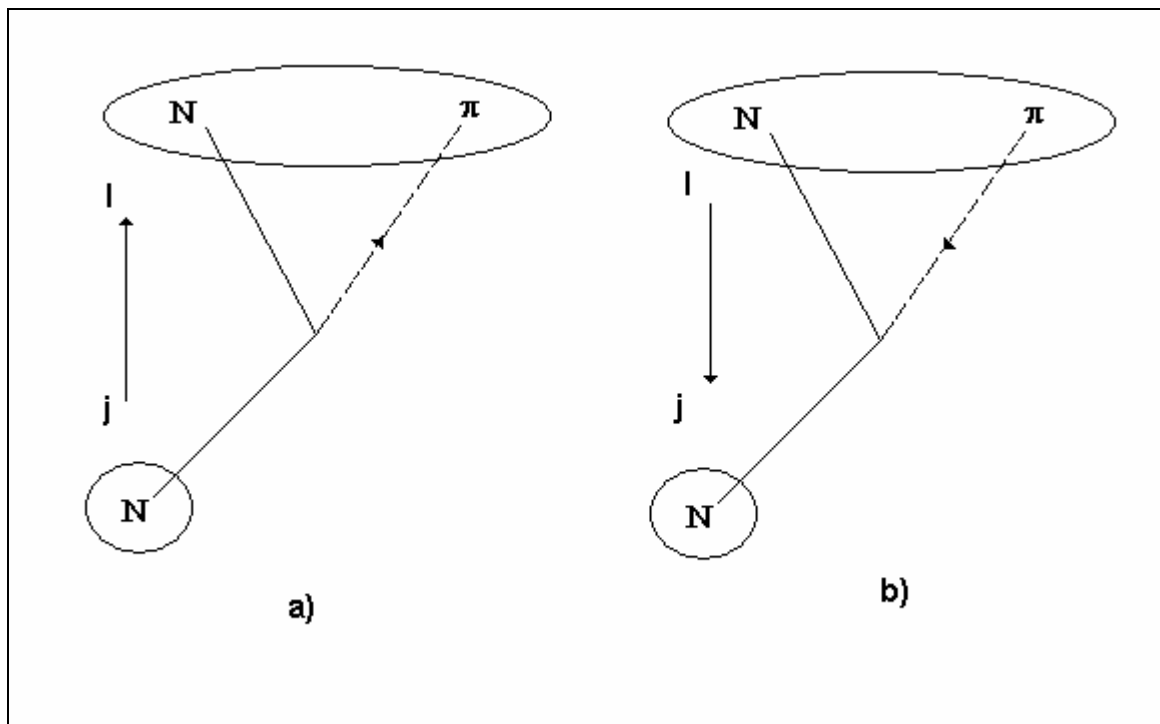
$$(H')_j \sim \langle n_j | \mathbf{a}_k^+ | n_j \rangle + \langle n_j | \mathbf{a}_k | n_j \rangle \sim \langle n_j | n_j - 1 \rangle + \langle n_j + 1 | n_j \rangle = 0.$$

Láthatjuk, hogy a kölcsönhatási energia nem kezelhető elsőrendű perturbációval, ezért a másodrendű tagot kell figyelembe vennünk. A másodrendű perturbációs számítás esetén a k impulzusú n pion cseréjével járó energiát az

$$E'_k = - \sum_{n'} \frac{\langle n | H' | n' \rangle \langle n' | H' | n \rangle}{\langle n' | H^0 | n' \rangle - \langle n | H^0 | n \rangle}$$

összefüggéssel közelítjük. Az n' -al jelölt állapot alatt az összes lehetséges vég és kezdeti állapotra való összegzést értjük. Jelen esetben ez erősen korlátozott, hiszen a keltő és eltüntető operátorok miatt a kölcsönhatásban a pion állapottérben csak 1-el változhat a részecskeszám, így az összegnek csak két lehetséges tagja van, valamint csak azt az esetet vizsgáljuk amikor 1 pion csere valósul meg:

- $0 \rightarrow 1$ virtuális átmenet: $N \rightarrow N + \pi$ (1.2.a. ábra) / pion-emisszió
- $1 \rightarrow 0$ virtuális átmenet: $N + \pi \rightarrow N$ (1.2.b. ábra) / pion-abszorpció



1.2. ábra. A lehetséges pion-nukleon átmenetek

A fentiek alapján $n' = n \pm 1$ (azonos impulzussal, hiszen különben a Fock-tér ortogonális vektorai jelennének meg), ezért a fenti kifejezés számlálója egyszerűen megkapható, felhasználva a szabad rendszer energiájának mátrixelemeit:

$$H_1^0 - H_j^0 = \omega_k.$$

A számlálóban lévő mátrixelemek szintén egyszerűen kiszámíthatóak a keltő és eltüntető operátorok szám-sajátállapotok között vett várható értékével:

$$\begin{aligned}
 H'_{lj} &= g \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} \left(\langle n \pm 1 | a_k | n \rangle \sum_{n'} e^{ik'x_{n'}} + \langle n \pm 1 | a_{k'}^+ | n \rangle \sum_{n'} e^{ik'x_{n'}} \right) = \\
 &= g \sqrt{\frac{1}{2\omega_{k'}}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n+1} \sum_{n'} e^{ikx_{n'}} \text{ ha } n+1 \\ \sqrt{n} \sum_{n'} e^{ikx_{n'}} \text{ ha } n-1 \end{array} \right\} ;
 \end{aligned}$$

ill.:

$$\begin{aligned}
 H'_{jl} &= g \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} \left(\langle n | a_{k'} | n \pm 1 \rangle \sum_{n'} e^{ikx_{n'}} + \langle n | a_k^+ | n \pm 1 \rangle \sum_{n'} e^{-ikx_{n'}} \right) = \\
 &= g \sqrt{\frac{1}{2\omega_{k'}}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n+1} \sum_{n'} e^{ikx_{n'}} \text{ ha } n+1 \\ \sqrt{n} \sum_{n'} e^{-ikx_{n'}} \text{ ha } n-1 \end{array} \right\} .
 \end{aligned}$$

A fenti mátrixelemek arra vonatkoznak, mikor a rendszerben már jelen van n db pion. Viszont számunkra, most azaz érdekes eset, mikor nincs pion a kezdeti és a végállapotbeli nukleonrendszerben, azaz $n=0$. Ekkor a mátrixelemek közül csak az $n+1$ végállapot ad nem eltűnő járulékot, így:

$$H'_{01} H'_{10} = g^2 \frac{1}{2\omega_k} \sum_{n,n'} e^{ik(x_{n'} - x_n)} .$$

Vegyük észre, hogy ekkor a H'_{jl} a pion abszorpciót, míg a H'_{lj} a pion emissziót írja le. Ezek segítségével felírható a perturbált energia az egy pion csere esetén

$$E_k = -\frac{1}{2} g^2 \sum_{n,n'} \frac{1}{\omega_k^2} e^{ik(x_{n'} - x_n)} = -\frac{1}{2} g^2 \sum_{n,n'} U_k(x_{n'} - x_n) ,$$

ahol x_n és $x_{n'}$ a kölcsönható nukleonok helyvektorai. Ebben a jelölésben az $U_k(x)$ függvény adja meg a nukleonok közti párkölcsönhatást. Tudjuk, hogy a kölcsönhatás jellégéből következően ennek a függvénynek minden nukleonra azonosnak kell lennie. A teljes kölcsönhatási energia ezen párkölcsönhatások eredője, amelyet minden nukleon-párra összegezni kell. Ebből következik, hogy elegendő 1 pár esetén meghatározni az $U_k(x)$ potenciált. Első lépésben írjuk fel a potenciált úgy, hogy kihasználjuk az ω_k definícióját:

$$U_k(x) = \frac{1}{\omega_k^2} e^{ikx} = \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ikx} .$$

Ha egy nukleon párra írjuk fel a kölcsönhatási energiát, akkor a potenciált kétszer kell vennünk - természetesen ugyanazzal az értékkel -, hiszen a nukleonok megkülönböztethetetlenek, valamint a teljes perturbált energiánál az összes lehetséges impulzussal keltett pion járulékát figyelembe kell vennünk, azaz

$$E = \sum_k E_k = -\frac{1}{2} g^2 2 \sum_k U_k(x) = -g^2 \sum_k U_k(x).$$

A potenciálban összegeznünk kell a lehetséges k impulzusokra. Mivel az impulzus folytonosan változik érdemes a kvantáláshoz használt V fázistérfogatot végtelenre növelni ($V \rightarrow \infty$, ezzel az összes lehetséges impulzust figyelembe vesszük), valamint ekkor át kell térnünk az összegzésről az impulzustérre való integrálásra:

$$\frac{1}{V} \sum_k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} 2\pi k^2 dk d(\cos \theta).$$

Ezzel a potenciált megadó kifejezés egyszerű alakra hozható:

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + m^2} dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{i|k||x| \cos \theta}.$$

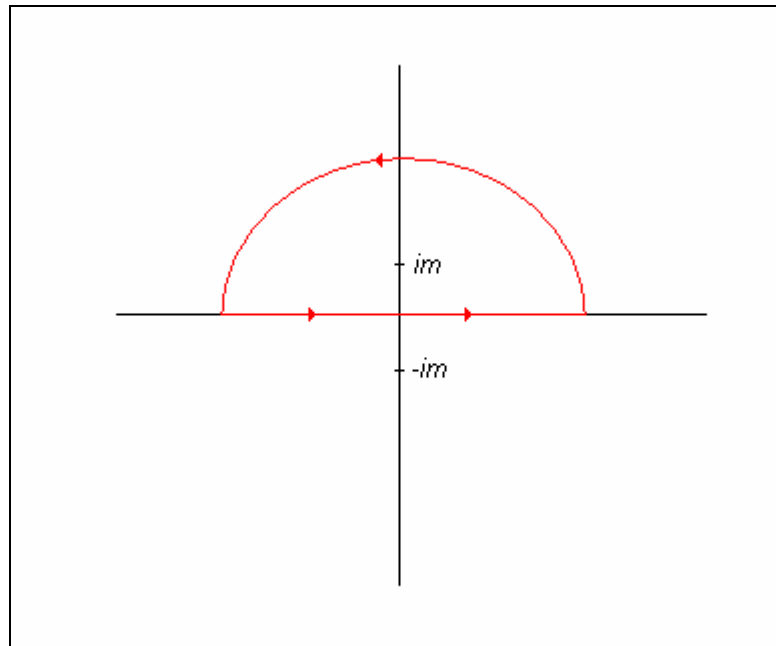
A $\cos(\theta)$ -ra való integrálás egyszerűen elvégezhető, míg a k -ra való integrálnak a végtelen tartomány miatt $\pm im$ helyeken pólusai vannak, ezért Reziduum-tételt kell alkalmaznunk. Mielőtt ezt megtennénk, végezzük el a következő ekvivalens átalakítást:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{k^2 + m^2} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{k^2 + m^2} e^{ikx} - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dy \frac{y}{y^2 + m^2} e^{iyx} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{k^2 + m^2} e^{ikx} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^0 dy \frac{y}{y^2 + m^2} e^{iyx} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{k^2 + m^2} e^{ikx}, \end{aligned}$$

ahol az integrál második tagjában először a $k = -y$, majd az $y = k$ változócsere alkalmaztuk, majd az integrálási határ felcserélésével sikerült kiterjesztenünk az integrált a $k \in (-\infty, \infty)$ tartományra. Ezzel a kiterjesztéssel már valóban kiértékelhetjük a valós függvényt, mint komplex integrál. Első lépésben bontsuk fel a fenti kifejezésben lévő törtet parciális törtek összegére:

$$U(x) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{1}{k - im} + \frac{1}{k + im} \right) e^{ikx},$$

majd a reziduum kontúrját úgy válasszuk meg, hogy a $k = -im$ ne adjon járulékot (1.3.ábra) (ez azért fontos, mert csak az a reziduum adhat járulékot, amely a peremeken (azaz a mi esetünkben végtelenben) reguláris, ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem lehet komplex integrálként kezelni a valós integrált):



1.3. ábra. A felső félsík pólusát körbevevő kontúr

Végeredményben a reziduum-tétel alkalmazása után a kapott potenciál:

$$U(x) = \frac{2\pi i}{2(2\pi)^2 ix} e^{-mx} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mx}}{x},$$

ahol m a pion tömege. Ezzel megkaptuk az ismert Yukawa-potenciált. A kapott eredmény alapján láthatjuk, hogy a magerő méretingskálája a pion tömegétől függ:

- $x \ll \frac{1}{m} \Rightarrow$ Coulomb-kh. dominál, $m \approx 140$ MeV,
- $x > \frac{1}{m} \Rightarrow$ Magerő dominál.

3 A csillagok fizikája

Ide jön egy bevezetés...

3.1. Empirikus megállapítások, Hertzsprung-Russell diagram (HRD)

A csillagok jellemzően észlelhető paramétereik (pl.: hőmérséklet, mágneses tér, tömeg, sugár, luminozitás stb.) alapján három fő csoportba sorolhatók (4.1. táblázat), az ilyen tulajdonságaik alapján a legnépesebb halmazt az ún. nemelfajult csillagok alkotják. Ide tartoznak a galaxisokat túlnyomó többségében alkotó, még most is aktív csillagok (köztük a mi Napunk is). A másik két csoport – a fehér törpék és a neutroncsillagok – lényegesen eltérő tulajdonságokat mutatnak. Ennek oka, hogy ezek az égitestek olyan sűrűséggel rendelkeznek, hogy bennük az elektrongáz, ill. a neutrongáz elfajulttá válik (ekkor a részecskékre jutó mozgási energia olyan nagy, hogy a gáz ultra-relativisztikussá válhat, ezért a standard eloszlásfüggvények nem érvényesek). E tulajdonság miatt ezeket az objektumokat degenerált csillagoknak is nevezik.

Észlelés szempontjából közvetlen információt a csillag csak azon rétegének összetételéről szerezhetünk, amelyek sugárzását mérni tudjuk, azaz a *fotoszféráról*. Kimutatható, hogy a nem elfajult csillagok halmazának 90%-ának kémiai összetétele nagyon hasonló. Ezért az ezekre jellemző elemösszetételt tekinthetjük normálisnak. Az ettől való eltérés anomális rendszerre utal. A további észlelések azt mutatják, hogy az univerzum további barionos anyagát szintén hasonló elemgyakoriság-eloszlás jellemzi (eltérést jelent a csillagok és az egyéb barionos anyagformák között, hogy a csillagokból szinte teljesen hiányoznak a könnyűfémek – Li, Be, B – ill. a deutérium). Ez a hasonlóság alapvetően nem meglepő, hiszen a másodgenerációs csillagok az intersztelláris (csillagközi) anyag összesűrűsödésével jönnek létre, ugyanakkor a csillagok mélyén (forró magban) lejátszódó magreakciók a kezdeti anyagösszetételt megváltoztatják, s hogy ez a legtöbb csillag fotoszférájában nem észlelhető, arra enged következtetni, hogy a csillag anyaga nem keveredik túl erősen. Egy minimális keveredésnek viszont lennie kell, hiszen „alacsony” hőmérsékleten, azaz kisebb mélységekben is fuzionáló könnyűfémek és deutérium hiánya arra mutat, hogy az anyag lekeveredik a mélyebb rétegekbe, ahol ezek az elemek elpusztulnak. A minimális keveredésre utal, az is, hogy nélküle a nyugalomban lévő légkörben végbemehetne a molekuláris diffúzió, azaz az egyes ionok és atomok súly és fotonbefogási hatáskeresztmetszet alapján történő elkülönülése, amely kémiai anomáliához vezetne. Végeredményben elmondhatjuk, hogy a csillagok fotoszférájának összetétele lényegében az egykori, a csillagot szülő intersztelláris felhőben uralkodó kémiai összetételt tükrözi.

A kémiai összetételt az egyes atomok és izotópok ε -jával jellemezhetjük, amely a 10^{12} protonra jutó adott típusú atommagok számát jelöli. Mivel egy normális összetételű csillagban a héliumnál nehezebb magok száma elenyésző, ezért a kémiai összetételt praktikusán a hidrogénre, héliumra és a fémekre vonatkoztatva adják meg. A nemelfajult csillagok esetében az előforduló elemek gyakoriságáról a következő általános megállapítások fogalmazhatók meg:

- az elemek gyakorisága a rendszám növekedtével csökken;

- a gyakoriságok eloszlásában dominánsak a magszerkezeti tényezők, pl.: a páros rend- és neutronszámú magok gyakoribbak (*Harkins-szabály*), és a mágikus magoknál különösen erős csúcsok mutatkoznak.

A fémek – a héliumnál nehezebb elemek – relatív gyakorisága a galaxiskorongokban gyakorlatilag alig változik, gyakran elég a fémtartalmat egyetlen kiválasztott fém segítségével jellemezni. Ez alapján használják általánosan az [Fe/H] indexet:

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log\left(\frac{\varepsilon_{\text{Fe}}}{\varepsilon_{\text{H}}}\right) - \log\left(\frac{\varepsilon_{\text{Fe}}}{\varepsilon_{\text{H}}}\right)_N,$$

ahol az N index a Napra utal. A fent bevezetett index alapján lehetőség nyílik a csillagok egy újabb osztályzására. A fémtartalom alapján történő osztályokat *csillagpopulációknak* nevezzük:

- II. vagy halopoluláció $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.5$;
- átmeneti vagy öreg korongpopuláció $-0.5 < [\text{Fe}/\text{H}] < -0.1$;
- fiatal korongpopuláció $-0.1 < [\text{Fe}/\text{H}]$.

Az alkalmazott osztályzás határai nem egzaktak, irodalmanként eltérőek lehetnek. Mint azt az osztályok elnevezésénél is láthatjuk, a populációs hovatartozás a csillagok relatív korával van kapcsolatban. Ez könnyen megérthető, hiszen a csillagok magjában lezajló magfizikai folyamatok a csillag anyagát fémekben feldúsítják. Természetesen a csillagok életük végén az anyaguk zömét visszaadják az intersztelláris anyagnak, így az fémekben feldúsul, ezért a később keletkező csillagok fémekben gazdagabbak lesznek.

Mint azt láthattuk a nemelfajult csillagok kémiai összetétele nagy hasonlóságot mutat, ezért a nagy pontossággal mérhető csillagok színeképnek megjelenését elsősorban a hőmérséklet determinálja. A normális csillagspektrumoknak a bennük jelenlévő vonalak intenzitásvizonyai alapján definiált típusa így egy egyparaméteres sokaságot alkot. A megkülönböztetett kilenc típus a következő:

Típus	T[K]	Domináns vonalak
O	30000	He II
B	15000	He I, H I
A	10000	H I
F	7000	H I, Ca II és K
G	6000	Ca II H és K, Fe I, G-sáv
K	5000	G-sáv, Fe I, Ca II
M	3500	TiO sávok, Ca I
L	2100	alkálifémek, fémhidridek
T	1300	metán

A római számok az ionizációs állapotot jelölik.

Még figyelembe kell vennünk, hogy a hőmérséklet döntő hatása mellett a nyomás is befolyásolja a csillag színeképét. A nyomástényező okozta változás a színeképvonalak szélességében mutatkozik meg. A kis nyomás mellett keletkező vonal keskeny és éles felfutású, míg magasabb nyomások esetében szélesebb. Ennek a hatásnak a következtében a színeképvonalak szélessége alapján is osztályozhatóak a csillagok, vegyük észre, hogy ez az osztályzás erősen korrelál a csillagok méretével és sűrűségével is. A tapasztalat azt

mutatja, az említett korrelációk mellett még fontos kapcsolat van a csillag luminozitásával is (adott hőmérsékleten). Ennek oka az, hogy az adott felszíni hőmérséklet mellett a fényesebb csillagok sokkal nagyobbak, így felszíni gravitációs gyorsulásuk és a légköri nyomásuk is kisebb. Ezen empirikus összefüggés miatt, a vonalszélességek szerinti osztályozást *Morgan-Keenan-féle luminozitási osztályzás*nak nevezik (MK-rendszer). A felosztás e szerint 6 csoportba történik:

- I - szuperóriások
- II - fényes óriások
- III - óriások
- IV - szubóriások
- V - fősorozat (törpék)
- VI - szubtörpék

Gyenge felbontású színekpeknél a hat osztályba történő besorolás gyakran nem lehetséges, ezért csak három durvább osztályba illesztik a kérdéses csillagokat. Ezeket az osztályokat kisbetűkkel jelölik: 'd' (törpe – V,VI); 'g' (óriás – III,IV); 'c' (szuperóriás – I,II). A mi Napunk ezen besorolás szerint dG2.

3.1.1. Korrelációk és a Hertzsprung-Russell diagramm

A csillagokat leíró különféle állapotjelzők által meghatározott többdimenziós állapotterekben a csillagoknak megfeleltethető pontok nem egyenletes eloszlást mutatnak, amely annak a következménye, hogy ezen mennyiségek kisebb-nagyobb korrelációban vannak egymással. Ezt tapasztalhatjuk már akkor is, amikor csillagokat első közelítésben fekete testnek tekintjük, hiszen ekkor összefüggést kapunk a színeképtípus és a színindex között. (A valóságban természetesen ez az összefüggés a különböző luminozitási osztályokon belül eltérő lehet a Planck-törvénytől.) Ebből következik egy egyszerű összefüggés a luminozítás (L), a csillag sugara (R) és effektív hőmérséklete (T_{eff}) között:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4.$$

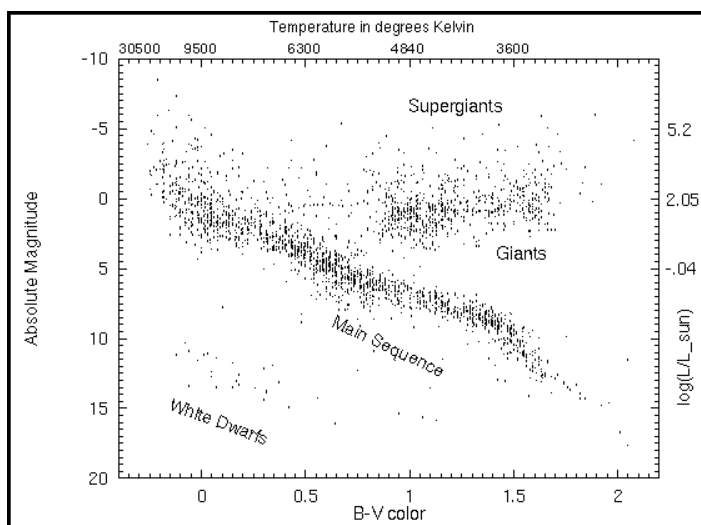
ahol felhasználtuk, hogy a T hőmérsékletű a fotongáz energiasűrűsége $\varepsilon = \sigma T_{\text{eff}}^4$. A kísérleti eredmények arra engednek következtetni, hogy konkrét összefüggés van a csillagok tömege és abszolút fényessége között is. A tömeg és a fényesség egyidejű mérése gyakorlati szempontból meglehetősen bonyolult, viszont bizonyos speciális esetekben (kettős csillagok, fedési kettősök) jól mérhetők. A meglévő mérések alapján a fősorozati csillagok tömege a fényesség logaritmusában ábrázolva nagyjából egy egyenesen helyezkednek el (kvázi egydimenziós sokaság). Ebből lesűrűzhető a tömeg és a luminozítás közti empirikus összefüggés:

$$L \propto M^{3.5}.$$

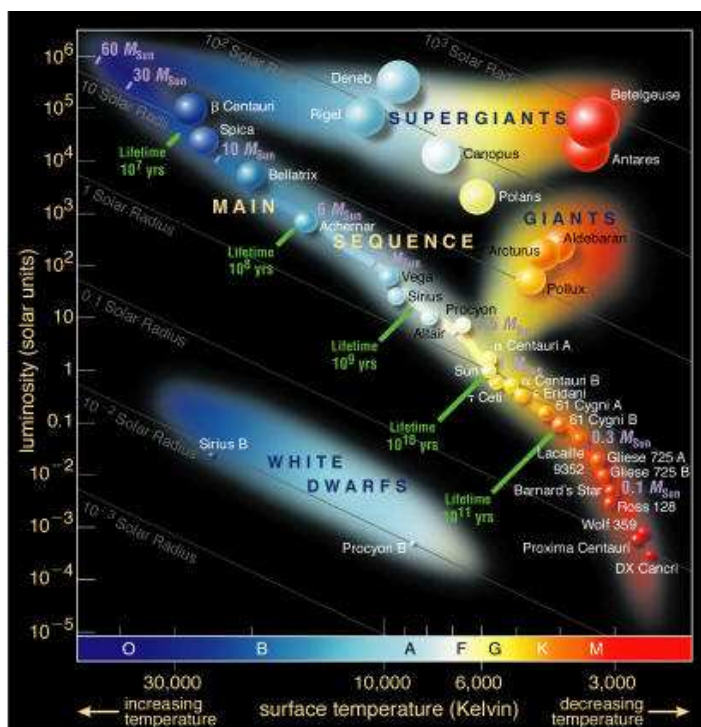
Vegyük észre, hogy a fenti összefüggés alapján azt kapjuk, hogy a nagyobb tömegű csillagok fejlődése (ez arányos az energiatermeléssel) gyorsabb, mint a kisebb tömegű társaiké.

A csillagok fizikája szempontjából az egyik legfontosabb összefüggés a csillag színeképtípusa és az abszolút fényessége közti összefüggés. Ez az állapot diagramm a *Hertzsprung-Russell* diagramm. Gyakran a vízszintes tengelyre a színeképtípus helyett a felszín abszolút hőmérsékletét írják, amely értelemszerűen egyértelmű megfeleltetés. Ez

látható a következő ábrán (4.1 a)b)ábra). Az állapot diagrammon a legfeltűnőbb tendencia az átlósan balról jobbra húzódó, nagyjából egy csökkenő egyenesbe eső nagyszámú pontok halmaza. Ezt nevezik *fősorozatnak*, az ebbe a halmazba tartozó csillagokat reprezentáló pontok az V. luminozitási osztályba tartozó csillagoknak felelnek meg. Közvetlenül a fősorozattól balra lent helyezkednek el a szubtörpék (VI. osztály), míg a fősorozattól felfele jobbra egy rövid szakasznyi halmazba koncentrálnak az óriások és a szuperóriások (I. és II. osztály). Az ábra egy véletlenszerűen választott minta állapot diagrammját mutatja, amely különböző életkorú csillagokat tartalmaz. Mivel a csillagok pillanatnyi állapotát az életkoruk határozza meg (a tömeg és a kémiai összetétel mellett), ezért nem meglepő, hogy a diagrammon több pontot találunk a főbb ágakon kívüli tartományokban.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**1.a ábra: A Hertzsprung-Russell diagram**



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**2.b ábra: A Hertzsprung-Russell diagram**

Láthattuk, hogy a főbb ágak már egy véletlen mintában is jelentkeznek, amelyből levonhatjuk azt a következtetést, hogy ezek az ágak olyan fejlődési szakaszoknak felelnek meg, ahol csillag állapota hosszabb ideig alig változik, így sok időt töltenek ezen tartományokban. Levonhatjuk azt az általános összefüggést, hogy a HRD főbb ágai a csillagfejlődés fő szakaszainak felelnek meg. Az ágszerkezet pontos feltérképezése érdekében jobb, ha a véletlen csillagminta helyett, olyat választunk, amely a csillag némely paramétereiben homogénnek tekinthető. Ilyen természetes mintát kínálnak a csillaghalmazok. Ezen objektumokban a csillagok fő különbsége a tömegben jelentkezik (a kezdeti kémiai összetétel a már elmondottak alapján szinte azonos), így a HRD szerkezetét egyetlen paraméter határozza meg.

Az egyik ilyen objektum az ún. nyílthalmaz, amely néhány $\sim 10 - 100$ csillagból álló, I. populációs halmaz. Ezek HRD-je közel egydimenziós sokaságot alkot. Ha több nyílthalmaz HRD diagrammját egymásra vetítjük, azt tapasztalhatjuk, hogy az egyes görbék közös burkológörbével rendelkeznek, amelybe az összes csík (az egyes halmazokhoz tartozó fősorozat (MS)) belesimul. Ez a burkológörbe a nulla korú fősorozat (ZAMS).

Egy másik típusú csillaghalmaz a gömbhalmaz, amely már $10^5 - 10^6$ csillagból áll. Itt már csak a legkisebb csillagok maradnak a fősorozaton, viszont az óriások szerkezete sokkal finomabb részletekben jelentkezik. Ezt mutatja a következő ábra (ábra beszúrása).

3.2. A csillagok energiatermelése, fontosabb magreakciók

Az előző alfejezet empirikus megállapításai után térjünk rá a csillagok elméleti modelljének egyes részleteire. Az első, amivel foglalkoznunk kell az a csillagok energiatermelésének kérdése. Mint tudjuk a csillagok nagy kiterjedésű, és hatalmas tömegű objektumok. Ennek következtében a gravitáció domináns szerephez jut. Mikor egy csillag a gravitációs erő hatására összehúzódik a potenciális energia megváltozása miatt szükségszerűen energia szabadul fel. Azonban könnyen belátható, hogy ez az energia nem tudja fedezni a csillag által kisugárzott energiát. A következőkben ezt a kérdést vizsgáljuk.

A gravitációs kontrakció következtében a csillag sugara R_0 -ról R' -re változik, az ez alatt felszabaduló potenciális energia

$$W = \frac{3GM^2}{5R_0} - \frac{3GM^2}{5R'}$$

Jelöljük az átlagosan egy másodperc alatt kisugárzott energiát \bar{L} -vel, ekkor a kontrakció

$$t = \frac{W}{\bar{L}}$$

ideig képes fenntartani a sugárzást. A szemléltetés kedvéért a fenti képleteket alkalmazzuk a Napra, ebben az esetben $M = 1,99 \cdot 10^{33}$ g, $R' = 6,96 \cdot 10^{10}$ cm, $L = 3,86 \cdot 10^{25}$ J/s. Ha azt az extrém esetet vesszük, hogy $R_0 = \infty$ (ezzel erősen konzervatív számítást végzünk), és figyelembe vesszük, hogy a Nap sugárzása régen lényegesen kevesebb volt mint most, azaz $\bar{L} = L/10$, akkor a sugárzási időre $\sim 10^8$ év adódik. A Föld jelenlegi kora

hozzávetőleg 5 milliárd év, amely legalább egy nagyságrenddel nagyobb, mint ameddig a Nap a gravitációs összehúzódással fedezni tudná a szükséges sugárzást. Ebből az egyszerű számításból már egyértelműen látszik, hogy a szükséges luminozítás fedezéséhez más energiaforrásra van szüksége a csillagnak.

A csillagban lejátszódó magreakciók figyelembevételével a sugárzási probléma megoldódik. Tekintsük azt az esetet, amikor az adott luminozításhoz szükséges energiát csak a magreakciókból fedezi a Nap. Vegyük azt az esetet, amikor az energiatermelés csak két hidrogén fúziójával történik. A reakciókban felszabaduló energia $\Delta E = 1,44 \text{ MeV}$, ha a sugárzás idejének a Föld korát, valamint az átlagos luminozítás $\bar{L} = L/2$ -nek vesszük, akkor a fúziós reakciók száma, amely képes fedezni a sugárzási veszteséget:

$$N_f = \frac{t \cdot \bar{L}}{\Delta E} \approx 2,4 \cdot 10^{52}.$$

Egy fúziós során 2 hidrogén egyesül, a fenti energiatermeléshez

$$\Delta M = N_f \cdot 2m_p \approx 10^{26} \text{ kg}$$

hidrogén „elégetésére” volt szükség, amely nagyjából 0,05%-os tömegváltozást jelent a Nap számára, ha a Nap tömegének csupán 10%-a égeti a hidrogént (a könnyű elemek fúziója csak a Nap középpontjához közeli régióban égnek el). Ennél viszont sokkal szerencsésebb helyzetben van a Nap, hiszen a fúziós folyamatok a fősorozathoz tartozó csillagokban nem állnak meg a hidrogénnél, hanem a teljes anyagot vas körüli elemekké alakítja. Ekkor az átlagosan felszabadítható teljes energia $\bar{E} \approx 1,6 \cdot 10^{45} \text{ J}$, 8 MeV nukleononként a fúzió során felszabaduló energiával számolva, ezzel az energiatermeléssel a Nap nagyjából 10^{11} évig tudna sugározni.

Ezen egyszerű számítások után levonhatjuk, azt a következtetést, hogy a Nap a magfúzió nélkül nem tudna az a tapasztalati időskálán világítani.

3.2.1. Magreakciók a csillagokban

A csillagok anyaga legnagyobb részben H (~75%) és He (~25%), éppen ezért az energiatermelés első és egyik legfontosabb lépése a proton-proton lánc, amely folyamat végén (részletek lásd a következő alfejezetben) ${}^4\text{He}$ keletkezik. A két proton közti fúzió végbemeneteléhez, az szükséges, hogy a két részecske között a távolság akkora legyen, hogy a köztük kialakuló vonzó erős kölcsönhatás domináljon a taszító Coulomb-potenciálhoz képest. A két proton közti Coulomb-gát klasszikusan $E \sim 0.5 \text{ MeV}$ körül van, azonban a kvantummechanikai alagúteffektus révén már kisebb energia is elég, hogy a részecskék a Coulomb-gáton áthaladjanak. A protonok energiája a hőmozgás révén növekedhet. 10 millió K hőmérséklet esetén a részecskék átlagos energiája a kinetikus gázelmélet alapján:

$$E = \frac{3}{2} k_B T \approx 1 \text{ keV},$$

ahol k_B a Boltzmann-állandó. A protonok energia eloszlása jó közelítéssel Maxwell-eloszlás, az eltérés oka a töltött részecskék között ható Coulomb-kölcsönhatás, azonban ettől eltekintve valóban jól alkalmazható a kinetikus gázelmélet modellje. Ez alapján a 10

millió K-es hőmérséklet mellett az eloszlás értelmében, már nagy számban fordulnak elő olyan részecskék, amelyek kinetikus energiája már 0,5 MeV körül van. Ez annyit jelent, hogy a két töltött részecske alagút-effektussal már olyan közel kerülhet egymáshoz, hogy létrejöhet a fúzió. Ahhoz, hogy a kiszámíthassuk a csillagokban a fúzió révén felszabaduló energiát ki kell számítanunk a reakciósebességet (R).

Vegyük a csillag egy adott térfogatelemét, az ebben időegység alatt lejátszódó reakciók számát könnyen kifejezhetjük az

$$R = n_a n_b \langle \sigma v \rangle$$

képlettel, ahol n_a és n_b az ütköző részecskék magűrűsége, v a két részecske relatív sebessége, $\sigma(v)$ a fúzió hatáskeresztmetszete. A sebességeloszlás szerinti normált várható értéket a következő összefüggés adja meg:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{\int \sigma(v) v N(v) dv}{\int N(v) dv},$$

ahol a sebességeloszlás a nem relativisztikus Boltzmann-eloszlást követi:

$$N(v) dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}},$$

m a két részecske redukált tömege. A kis energiájú ($\sim keV$) magreakciók hatáskeresztmetszete a semleges neutronok esetében az részecske energiájával fordítottan arányos:

$$\sigma \approx \frac{K}{E},$$

ahol K az adott magreakcióra jellemző konstans, E a neutron kinetikus energiája. A töltött protonok esetében a magreakciók alapfeltétele, mint már említettük a Coulomb-gáton való átjutás. Ahogy ezt az alfa-bomlás esetében már beláttuk, egy korrekciós faktort jelent a neutronra vonatkozó képletekhez képest, így a protonra vonatkozó neutron hatáskeresztmetszetek energiatfüggése jó közelítéssel:

$$\sigma_p \approx \frac{K}{E} e^{-2\pi\eta}, \quad \text{ahol } \eta = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v} = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}},$$

ahol Z_i a fuzionáló magok rendszáma, e az elemi töltés. A hatáskeresztmetszetek közelítő ismerete mellett kiszámíthatjuk a $\langle \sigma v \rangle$ sebességeloszlásra vett átlagát. Ehhez a szemlélet kedvéért térjünk át a sebességváltozóról az energiaváltozóra. Ekkor az átlagot megadó integrál:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \sigma(E) \sqrt{\frac{2E}{m}} N(E) \frac{dv}{dE} dE}{\int_0^{\infty} N(E) \frac{dv}{dE} dE} \dots$$

Az ennek megfelelő Boltzmann-eloszlás:

$$N(v)dv = N(E) \frac{dv}{dE} dE = 4\pi \sqrt{\frac{2E}{m}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE,$$

Az átlagot magadó tört nevezője definíció szerint a rendszerben lévő összes részecskét adja meg. A számláló a változók csoportosításával a következő alakra rendezhető:

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \frac{2K}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T} - \frac{B}{\sqrt{E}}} dE,$$

ahol $B = 2\pi\eta\sqrt{E}$ egy, az energiától független konstans, mivel η az energia gyökének inverzével arányos. Számunkra azok a magreakció a relevánsak, amelyek nagy számban fordulnak elő a csillagban, tehát a reakciósebességük nagy. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kinetikus energia mellett érhető el a maximális reakciósebesség. Mint a fenti képletből is leolvasható a maximális reakciósebesség, azt jelenti, hogy az integrandus értéke maximális, amely azzal ekvivalens, hogy az exponenciális minimális. Egyszerű szélsőérték-számítással megadhatjuk azt a részecskeenergiát, ahol az exponenciális minimális:

$$E_{\min} = \left(\frac{1}{2} B k_B T \right)^{2/3}.$$

Ennek ismeretében a fenti integrált *Taylor-sorba* fejthetjük a meghatározott minimum (E_{\min}) környékén, majd az integrálást elvégezve a

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{16}{9\sqrt{3}} \frac{\hbar}{2\pi e^2} \frac{K}{Z_1 Z_2} \tau^2 e^{-\tau}, \quad \tau = 3 \left(\frac{K}{2\sqrt{k_B T}} \right)^{2/3}$$

képletet kapjuk. Végeredményben kaptunk egy konkrét kapcsolatot a csillag abszolút hőmérséklete és a domináns szerepet betöltő magreakciók reakciósebessége között. Az összefüggés szerint a reakciósebesség a hőmérséklet monoton csökkenő függvénye. Ez első közelítésben meglepőnek tűnik, hiszen azt várnánk, hogy magas hőmérsékleteken több fúziós reakció játszódik le. Azonban nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a fenti eredmény csak azokra a reakciókra vonatkozik, ahol a részecskék energiája kicsi, ezért a hatáskeresztmetszetekre igaz az $1/E$ karakterisztika. Amikor növeljük a hőmérsékletet a Boltzmann-eloszlásnak megfelelően a részecskegyakoriság maximuma eltolódik a nagy energiák felé, ezért a kis energiájú részecskék gyakorisága (száma) lecsökken, valamint az intermedier magfúziók hatáskeresztmetszet is csökken. Ezek együttesen eredményezik a kapott monotonitást.

A fenti megállapítás egyben mutatja a kapott eredmény korlátait is, viszont a valóságban ennek ellenére jól alkalmazható, hiszen a csillagok hőmérsékletéhez (~10 millió K) rendelhető átlagos kinetikus energia (~1 keV) az alkalmazhatósági határon belül van.

Egy roppant fontos jelenséget egyelőre még nem vizsgáltunk. A kis energiájú magreakciók esetében az $1/E$ -vel arányos hatáskeresztmetszetek mellett megjelennek a rezonanciák (ld. Magreakciók megfelelő alfejezetében). Rezonanciák esetében az adott rezonanciaenergiához tartozó hatáskeresztmetszet energiatfüggését első közelítésben *Breit-Wigner-formula* írja le. Az olyan magreakciónál, ahol a target magot a rezonanciaenergiához (E_r) közeli energiával rendelkező részecskével bombázzuk, akkor a hatáskeresztmetszet

$$\sigma(a,b) = g \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

formula szerint alakul, ahol az „ a ” a bombázó részecskére, míg a „ b ” a reakció után kilépő részecskére utal, $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$ teljes vonalszélesség, $k = p/\hbar$ hullámszám, g a spinektől függő súlyfaktor. A rezonancia reakciókból eredő magreakciók reakciósebességéhez a fenti *Breit-Wigner-formulát* kell az integrálba helyettesíteni. Mivel a $\sigma(a,b)$ -nek a rezonanciaenergián van maximuma, ezért érdemes a $\langle \sigma v \rangle$ számításánál E helyére E_r -t írni, és az integrált az E_r körüli kis tartományra integrálni:

$$\langle \sigma v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{2E_r}{m} e^{-\frac{E_r}{k_B T}} \int_{v_r - \Delta v_r}^{v_r + \Delta v_r} \sigma(v) dv = \left(\frac{2\pi}{mk_B T} \right)^{3/2} \hbar^2 g \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} e^{-\frac{E_r}{k_B T}}.$$

Mind a kis energiákon történő magreakciók, mind a rezonanciareakciók esetében azt tapasztaljuk, hogy a reakcióssűrűség függ a reakcióban résztvevő részecskék sűrűségétől, ill. a hőmérséklettől közel exponenciálisan. A rezonanciáknál még fontos tényező a közbenső rendszer állapota (rezonanciák szélessége).

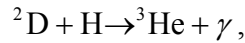
Eddigi számításaink során megmutattuk, hogy a csillagok jelenleg is tapasztalható sugárzása csak magreakciók (nukleáris fúzió) révén valósulhat meg, ill. általánosan megvizsgáltuk, hogy milyen tényezők befolyásolják a kérdéses magreakciók gyakoriságát. A továbbiakban részletesen kifejtsük, hogy a csillag egyes állapotaiban milyen konkrét fúziós folyamatok dominálnak.

3.2.1.1. Energiatermelő magreakciók a csillagokban

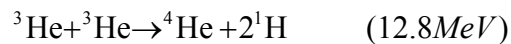
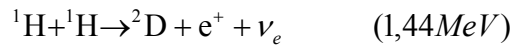
A csillagokban a legfontosabb energiatermelő folyamat a hidrogénfúzió, hiszen ez az elem teszi ki a csillag anyagának döntő többségét, ~ 75% (természetesen a csillag anyagi összetétele kissé változhat, attól függően, hogy szupernóva-robbanás előtt vagy után keletkezett).

Amikor egy kozmikus gázfelhő lassan összehúzódik a nagy anyagsűrűség miatt létrejövő gravitációs vonzás következtében, akkor az melegedni fog. A hőmérséklet emelkedés miatt a gázfelhő anyaga egyre jobban ionizálódik, majd a meg növekedett kinetikus energia révén egyre több atommag győzi le a Coulomb-gátat, és vált ki magreakciókat.

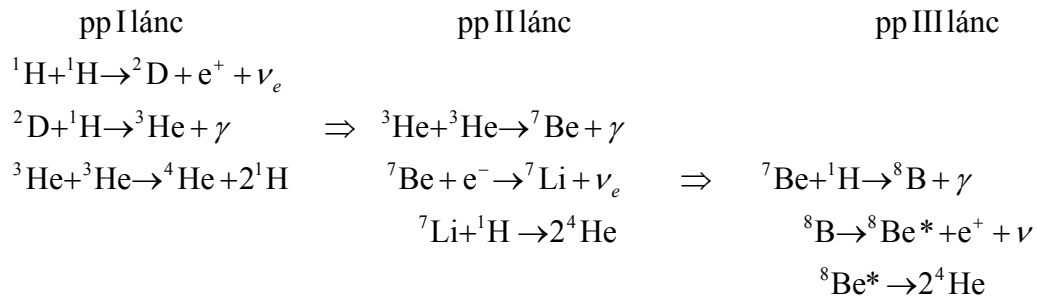
Első lépésben a csillag anyagát kis számban alkotó deutériumok lépnek reakcióba a környezetükben lévő hidrogénnel:



ez a folyamat a deutériumégés. Az említett reakció hamar leáll a deutérium elfogyása miatt, viszont ezalatt a pár millió K hőmérsékletnél beindult reakció a csillag hőmérsékletét képes felmelegíteni $\sim 10^7$ K körüli értékre. Ezen a hőmérsékleten már a protonok is legyőzik az egymás közti Coulomb-gátat és létrejön a hidrogénégés, amely során pótlódik az elfogyasztott deutérium. Az így kialakult reakciósorozat a proton-proton (pp) lánc, amely végén 4 protonból hélium keletkezik:

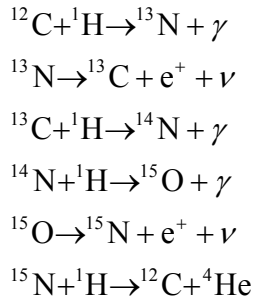


A pp lánc első tagja nagyon lassan megy csak végbe, mivel a fúzió során deutériumnak kell kialakulnia (${}^2\text{He}$ nem létezik, mivel a magerők spinfüggése és a Coulomb-taszítás nem tesz lehetővé ezt a kötött állapotot). A folyamat csak úgy valósulhat meg, ha gyenge kölcsönhatással az egyik proton neutronná bomlik, amely „ritka” folyamat, ez az oka annak, hogy a proton-proton égés ideje $\sim 14 \cdot 10^9$ év! Érdemes megjegyezni, hogy a deutériumégés időskálája csupán néhány másodperc (6-10 s)! Ezen a példán látható, hogy mennyit számít a gyenge kölcsönhatás szerepe, hiszen e nélkül elképzelhető, hogy a csillagban lejátszódó fúziós folyamatok olyan gyorsan lezajlanának, hogy nem lenne idő az élet kifejlődésére (még lesz egy fontos „fejlődési gát” a berillium esetében). A fent vázolt három reakció a pp lánc főcsatornája, azaz a legvalószínűbb reakciók sorozata, ezt általában pp I láncnak nevezik. Azonban a folyamatnak vannak mellékágai is, ahol szintén hélium lesz a végállapot:



Az említett pp II és pp III láncok ritkán végbemenő folyamatokat jelentenek. Vegyük észre, hogy mindkét mellékág tartalmaz gyenge kölcsönhatást, ezért ezen reakciók időskálája szintén millió év környékén van.

A pp ciklusok eredményeképpen a csillag hőmérséklete folyamatosan növekszik. Amikor a mag hőmérséklete meghaladja a $2 \cdot 10^7$ K-t, egy új reakció indul be, amely szintén a héliumtermelésben vesz részt. Ez a folyamat a szén által katalizált CNO-ciklus:



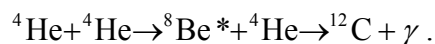
A ciklusban a héliumon kívül keletkezik 2 pozitron és 2 elektron-neutrínó és 3 gamma foton. Láthattuk, hogy a pp láncokban is a gyenge kölcsönhatások révén szintén keletkeznek neutrínók. A neutrínók csak gyengén hatnak kölcsön, ezért az áthatolóképességük nagyon nagy, így szinte akadálytalanul hagyhatják el a csillagot. Mivel ezen részecskék viszonylag nagy energiával rendelkeznek képesek vagyunk a földi detektorainkkal észlelni őket. A kísérleti tapasztalatok azt mutatták, hogy a tényleges neutrínófluxus lényegesen alacsonyabb, mint amelyet az elméleti számításokból vártak volna. Ez volt az ún. napneutrínó-probléma. Ennek megoldása 2001-ig váratott magára, ekkor bebizonyosodott, hogy a naphól érkező elektron-neutrínók egy része mire eléri a Föld felszínét átalakul egy más tömegű neutrínóvá (más típusú) neutrínóvá, és ezen új neutrínókra a detektoraink érzéketlenek, ez okozza a vártnál kisebb fluxust. A neutrínók egymás közti átalakulását neutrínó-oszcillációnak nevezik (részleteket lásd. Appendix D).

Az eddig tárgyalt reakcióláncok nettó hatása a leptonok és a fotonok mellőzésével összefoglalóan $4\ ^1\text{H} \rightarrow\ ^4\text{He}$ alakba írható. Ez a reakció folyamatoként kb. $4 \cdot 10^{-12}$ J energiát ad. Ha a hidrogén kiegészése után a hőmérséklet tovább emelkedik újabb fúziós folyamatok is beindulhatnak, amelyek közül általában hőmérsékletenként csak egy főlánc adja az energia legjelentősebb részét. A továbbiakban, ezeket a főcsatornákat mutatjuk be, a teljes részletességet mellőzve.

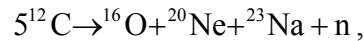
Amikor a hidrogénégéssel a csillag hőmérséklete 10^8 K környékére emelkedik beindul a 3α -folyamat és ^{12}C keletkezik. Ez a reakció azonban nem triviális. A pp és CNO láncok révén keletkezett ^4He magok képesek egyesülni, így $^8\text{Be}^*$ keletkezik, amely azonban egy nagyon erősen instabil mag (felezési ideje $\sim 10^{-17}$ s), ezért általában azonnal el is bomlik:



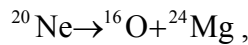
Ha azonban, ezen rövid élettartam alatt a berillium találkozik egy nagy energiájú alfa-résszel akkor létrejöhet a fúzió:



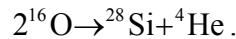
Ennek a valószínűsége nagyon kicsi lenne a berillium rövid élettartama miatt, azonban a természet megoldotta ezt a problémát, mert az adott hőmérséklethez tartozó energiánál a ^{12}C -nek van egy rezonanciaállapota, amely révén a reakció valószínűsége nagyságrendekkel megugrik. A 3 termikus alfa-rész széné történő fúziójánál a ^{12}C 7,75 MeV-es rezonanciaállapota gerjesztődik. Amikor a héliumégés miatt az összes hélium elfogyott, a csillag hőmérséklete $6 \cdot 10^8$ K körül mozog, ekkor bekövetkezik a szénégés, melynek főcsatornája:



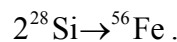
majd a neon



és oxigénégés

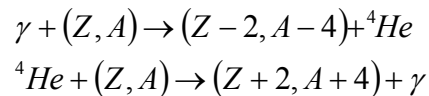


Végül a $2,5 \cdot 10^9$ K körül a szilíciumégés zárja a folyamatokat:



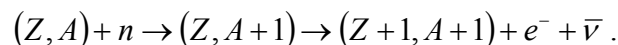
A folyamatok végeredményeképpen a csillag anyagának döntő része átalakul vassá, amelynél az egy nukleonra eső kötési energia maximális, így a fúziós energiatermelés leáll, és beáll a nukleáris egyensúly.

A csillagokban nem csak az energiatermeléssel járó reakciók fontosak, hanem azok is, amelyek az anyagának összetételét dominánsan meghatározzák (vegyük észre, ezzel az Univerzum anyagi összetétele is változik). Az egyik ilyen folyamat az α -folyamatok (fotodezintegrációs átrendeződések):



elmondható, hogy minden $A \sim 20-50$ közti páros rendszámú elem így keletkezik az óriáscsillagok belsejében.

A páratlan rendszámú és a vason túli elemek jórészt neutronbefogással keletkeznek (ugyan úgy, mint ahogy az atomreaktorokban a transzurán elemek). Ez az un. s-folyamat („slow”):



Az r-folyamat („rapid”) hasonló az s-folyamathoz, csak itt a neutron befogó radioaktív mag még bomlás előtt befog egy újabb neutron, és a tömegszám ezzel ugrásszerűen nő. Az r-folyamathoz nagy neutronfluxus szükséges, ezért ez csak a szupernóvákban fordul elő.

3.3. Csillagfejlődés és szupernóva-robbanás

Az előző szakaszokban megismertedtünk a csillag mérhető tulajdonságaival és egy pár egyszerű empirikus korrelációval az állapotjellemzők között, valamint az energiatermelő és anyagi összetételét befolyásoló folyamatokról. Ebben a részben a csillagfejlődés mutatjuk be a viriál-tétel és az állapotegyenletek segítségével a születéstől a főágig, majd a főág után a kollapszuson keresztül a szupernóva-robbanásig.

3.3.1. Csillagfejlődés, születés és a fősorozat

A csillagfejlődés első fázisa, azaz a kozmikus anyag kollapszusa, amely során kialakulnak az univerzum alapköveinek számító galaxisok, ill. bennük a lokális csomósodások következtében létrejövő újabb és újabb összehúzódások révén a csillagok születése legegyszerűbben a klasszikus mechanikából ismert viriál-tétel (bővebben lásd. Appendix D) segítségével írható le:

$$\frac{1}{2}\ddot{\theta} = 2E_k + \Omega,$$

ahol a rendszer tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \sum_i m_i r_i^2$, E_k a teljes kinetikus energia, $\Omega = \sum_i \mathbf{r}_i \mathbf{F}_i$ a viriál-tag, amely potenciális erőterben való mozgás esetén éppen a potenciális energiával megegyező tag. A fő feladat a rendszer állapotának azonosítása, tehát a hőmérséklet, a tömeg vagy sűrűség és a geometria méret csillagra vonatkozó paramétereik között lévő kapcsolat meghatározása.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a csillag anyagát (vagy az univerzum anyagát, jelen esetben a leíráshoz nem kell különbséget tennünk, hiszen a két rendszer anyaga azonos, valamint a csillag azon fázisával foglalkozunk, amikor még nem indul be a pp lánc) ideális gáznak. Egy T hőmérsékletű ideális gáz egy részecskéjének mozgási energiája a kinetikus gázelmélet szerint

$$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2} k_B T,$$

akkor egy dm tömegegységben lévő dN molekula kinetikus energiáját a következőképpen írhatjuk fel:

$$dE_k = \frac{3}{2} k_B T dN = \frac{3}{2} (\gamma - 1) c_v T dm, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

ahol γ az adiabatikus index, c_p és c_v az állandó nyomáson, ill. állandó térfogaton vett fajhő. Egy gáz belső energiája a termodinamikai szerint

$$dE = c_v T dm,$$

amelyből leolvasható a kinetikus és a belső energia közti kapcsolat:

$$E_k = \frac{3}{2} (\gamma - 1) E.$$

Ha jelen van a gravitációs erőter, akkor a rendszer teljes energiája $U = E + \Omega$ (a viriál alkalmazása jogos, hiszen említettük, hogy potenciális erőter esetén a kettő azonos). A viriál-tétel értelmében, ha a rendszer egyensúlyban van, akkor $2E_k = -\Omega$. Az első főtétel és a viriál-tétel felhasználásával a következőt kaphatjuk a fenti képlet alapján:

$$E = -\frac{\Omega}{3} \frac{1}{(\gamma-1)}, \quad U = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)} \Omega.$$

Az ideális gáz adiabatikus indexe $\gamma = 5/3$, ezzel a teljes energiája $U = \Omega/2$, míg a belső energiája $E = -\Omega/2$ (ezek az eredmények természetesen csak a hidrosztatikai egyensúlyra vonatkoznak), valamint $E_k = E$. Minket most nem is az egyensúly érdekel, hiszen még nincsenek magreakciók, hanem maga a kollapszus.

Amikor a csillag vagy az univerzum anyaga a gravitáció következtében összehúzódik a tehetetlenségi nyomatóka a viriál-tétel értelmében lecsökken, ezért

$$2E_k + \Omega < 0 \Rightarrow 2E_k < |\Omega|,$$

a viriál abszolút értékét jogos a képletbe írni, hiszen vonzó potenciál esetében szükségeszerű $\Omega < 0$, így az egyenlőtlenség jobb oldalán biztos pozitív mennyiség lesz. Ellenkező esetben nem beszélhetünk kontrakcióról sem. Ha a rendszerben egyenletes anyageloszlást feltételezünk, akkor az R sugarú, M teljes tömegű ideális gázcömb gravitációs potenciálja:

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

a teljes kinetikus energia, amely megegyezik a teljes energiával:

$$E = E_k = \frac{3}{2} k_B \bar{T} N = \frac{3}{2} k_B \bar{T} \frac{M}{\mu m_H},$$

ahol m_H a hidrogénatom tömege, μ a molekulaszám és \bar{T} a csillag átlagos hőmérséklete. Itt feltételeztük, hogy az objektum teljes anyaga hidrogén, mely jó közelítéssel igaz is a csillagokra és a galaxisokra. A kapott képletek visszahelyettesítve a viriál-tételbe, megkapjuk az összehúzódás feltételét:

$$3k_B \bar{T} \frac{M}{\mu m_H} < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

amelyből az következik, hogy a kontrakció csak akkor valósul meg, ha a hőmérséklet alacsony, vagy a rendszer tömege nagy. Egy másik következmény, hogy ha a csillag tömege állandó, akkor a kontrakció következtében a sugár csökkenésével az egyenlőtlenség jobb oldala növekszik, így a rendszer hőmérséklete magasabb értéket vehet fel, anélkül, hogy a folyamat leállna. Már ebből az egyszerű megközelítésből is szépen látszik, hogy az anyag a pusztán összehúzódás révén képes növelni a hőmérsékletét.

Az egyszerű viriál-tétel alkalmazása után térjünk rá a csillagok szerkezetének pontosabb elméleti tárgyalására. Ehhez első lépésben bizonyos feltevésekkel kell élnünk. Az egyik ilyen, hogy a csillag belsejében közelítőleg *termodinamikai egyensúly* van. Ez természetesen első lépésben nem megalapozott kijelentés, viszont a modell ily módon

történő felépítése után posteriori igazolható, hogy a feltevés teljesül és az alkalmazott modell konzisztens. Az közelítő termodinamikai egyensúly azért előnyös, mert így alkalmazható termo- és hidrodinamikai leírás.

Fontos megjegyezni, hogy termodinamikai egyensúlynak nem következménye vagy feltétele a nukleáris egyensúly, a csillag csak törekedik a nukleáris egyensúly felé, így ez tekinthető a csillag működés mozgatórugójának (emlékezzünk vissza, a magreakciók ismertetésére, ahol bemutattuk, hogy a végállapot a vas körüli elemek kialakulása).

Mivel nem beszélhetünk nukleáris egyensúlyról, ezért a termodinamikai állapotjellemzők (nyomás (P), hőmérséklet (T), makroszkopikus sebesség (\mathbf{v}), sűrűség (ρ)), mellett a kémiai összetételt is be kell vezetni ($\{c_i\}$, i -ik komponens tömeghányada). Az említett paraméterek egyértelműen meghatározzák a μ átlagos molekulásúlyt, és a $\{\mu^*_i\}$ kémiai potenciálokat, az ε_N fajlagos nukleáris energiatermelési rátát, valamint a reakciós rátákat és a transzportegyütthatókat.

Keressük a csillag állapotegyenletét a következő alakban:

$$P(\rho, T) = P_g(\rho, T) + P_r(\rho, T),$$

ahol a g index a gáznyomásra, az r index a sugárnyomásra utal. Ezzel előrevetítettük, hogy a leírás szempontjából a csillagot nehéz részecskegáz és fotongáz keverékeként kezeljük. A sugárnyomás a statisztikus fizikából ismert hőmérsékletfüggéssel adható meg:

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4,$$

nemelfajult plazmánál a gáznyomás (a gáz valóban nemelfajultnak tekinthető, hiszen a rendszer hőmérséklete alacsony):

$$P_g = \frac{R}{\mu} \rho T.$$

A következőkben írjuk fel a csillagra vonatkozó termi-hidrodinamikai egyenleteket, ahol azzal az egyszerűsítő feltevessel fogunk élni, hogy nem vesszük figyelembe az elektromágneses tér jelenlétét. Ellenkező esetben a mozgás és hőterjedési egyenletekhez csatolnunk kéne a Maxwell-egyenleteket is, azonban ezek olyan lokális események és perturbációkat írnak le, amelyek a nagyléptékű csillagfejlődés leírása szempontjából nem dominánsak, így az elhanyagolással nem követünk el nagy hibát.

Az első egyenlet, amit fel kell írunk az a csillag anyagát képező kémiai elemekre vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} + \nabla(\rho c_i \mathbf{j}_i) = Q_i - \nabla \cdot \mathbf{j}_i,$$

ahol \mathbf{j}_i a adott komponensre vonatkozó diffúziós áram, Q_i egy forrás tag (fúzió lehetséges figyelembevétele). A mozgásegyenletként a Navier-Stokes egyenletet használjuk, amely megadja az impulzusmérleget:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \hat{\tau} - \nabla U,$$

ahol P a nyomás, $\hat{\tau}$ a viszkózus feszültségtenzor, U a gravitációs potenciál, amelyet a Poisson-egyenlet határoz meg:

$$\Delta U = 4\pi G \rho.$$

Még szükségünk van az energia- ill. entrópiamérleget kifejező egyenletre, melyet a hőterjedés egyenletével adunk meg:

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S \right) = \rho \varepsilon_N - \nabla \mathbf{F} + \Phi_v - \rho \sum_i \mu_i^* \frac{dc_i}{dt},$$

ahol S a fajlagos entrópia, \mathbf{F} a makroszkopikus hőáram-sűrűség, Φ_v a disszipációs függvény. Az egyenletekben előforduló $\{\mathbf{j}_i\}$, \mathbf{F} , és τ áramokat valamint a $\{Q_i\}$, Φ_v és ε_N forrásokat a kinetikus fizika módszerével lehet meghatározni. A közelítő termodinamikai egyensúlyt kihasználva az áramokat lineáris transzportösszefüggésekkel közelíthetjük, pl.:

$$\mathbf{F} = -\chi \nabla T,$$

ahol χ a hőterjedési együttható, amely két tag összegére bontható:

$$\chi = \chi_r + \chi_c,$$

ahol a χ_r a sugárzás útján, míg a χ_c a vezetés útján megvalósuló hőterjedést veszi figyelembe. Általánosságban elmondható, hogy a nem elfajult csillagok esetében $\chi_r \gg \chi_c$. A továbbiakban az egyenletek általános megoldásával nem foglalkozunk, ehelyett egy speciális esetet fogunk vizsgálni, amely jól illusztrálja az általános eset főbb jellemvonásait. Ez a modell a szigorúan sztatikus szférikus modell (SzSzSz):

- A csillag gömbszimmetrikus. Ebből következik, hogy nem foroghat és nem lehet mágneses tere sem. Az előny, hogy a r független változó helyett választható az

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr',$$

amely nem más, mint a folyó tömeg.

- A csillag szigorúan sztatikus, azaz minden fizikai mennyiség parciális időderiváltja azonosan nulla. Ebből azonnal következik, hogy a csillagban nincs mozgás ($\mathbf{v} \equiv 0$).
- A kémiai összetétel adott, előre meghatározott függvény. Az elektronok mennyisége szintén adott, mégpedig úgy, hogy a csillag anyaga minden tartományban kvázineutrális legyen. Ennek következtében elértük, hogy az elektromos télerősség mindenütt nulla (megfelelő méretskálán kívül).

Fontos megjegyezni, hogy az említett három feltevés szigorúan véve általában nem konzisztens. Ha ugyanis a kémiai összetétel rögzített, az általában nem vezet nukleáris, ill. diffúziós egyensúlyra, ezért a kontinuitási egyenlet jobb oldala nem tűnik el, így

$\frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} \neq 0$, ami viszont ellentmond a sztatikus feltételnek. Természetesen a valóságban sincs nukleáris egyensúly, de a kémiai változást elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük, ami azzal egyenértékű, hogy a diffúziós és a nukleáris időskála sokkal nagyobb, mint *Kelvin-Helmholtz időskálánál* (a sugárzási egyensúly kialakulásának karakterisztikus ideje) és a szabadesés idejénél (hidrosztatikai egyensúly kialakulásának karakterisztikus ideje, pl. a mi Napunk estében ez az idő ~ 1 h). Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a csillagokat szigorúan állandó állapotúnak véve a csillagfejlődés miatti lassú változás elhanyagolható.

Ez a modell érezhetően nagy mértékben leegyszerűsíti a csillagszerkezetet leíró egyenleteket. A gravitációs potenciált megadó Poisson-egyenlet a folyó tömeg segítségével közvetlenül integrálható:

$$-\frac{dU}{dr} \equiv \mathbf{g}(r) = -G \frac{M(r)}{r^2},$$

ahol \mathbf{g} a gravitációs gyorsulás vektora. Mivel a feltevésünk szerint $\mathbf{v} = 0$, a fenti összefüggést kihasználva a mozgásegyenlet (Navier-Stokes egyenlet) a következő egyszerű alakba írható:

$$\frac{dP}{dr} = -G\rho \frac{M(r)}{r^2},$$

az egyenleten azért nem szerepel a viszkózus feszültségtenzor, mert a csillag anyaga nem végez semmilyen mozgást. A energiaegyenlet szintén egyszerűsíthető, ha kihasználjuk az áramokat megadó transzportösszefüggéseket

$$\rho \varepsilon_N = \nabla \mathbf{F} = -\frac{d}{dr} \chi \frac{dT}{dr},$$

ahol az operátorok kifejtésénél kihasználtuk a rendszer gömbszimmetriáit. Az meglévő egyenleteinkhez csatolhatjuk a nemelfajult csillagokra vonatkozó állapotegyenletet is:

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4.$$

A kémiai potenciált a hőmérséklet és a sűrűség egyértelműen meghatározza. Ahhoz, hogy a meglévő egyenleteinket meg tudjuk oldani, az ε_N és χ ismeretlen függvényeket ki kell fejeznünk. A következőkben a hőterjedést vizsgáljuk részletesebben.

Mint említettük nemelfajult csillagokban $\chi_r \gg \chi_c$, ezért $\chi = \chi_r$, mely kifejezhető az opacitás segítségével. Tegyük fel, hogy a csillag pontonként a Planck-függvény szerint sugároz, és az adott pontban jelenlévő sugárzás a pont l_ν környezetéből ered (l_ν fotonok szabad úthossza, a Napban $\sim 10^{-4}$ m):

$$I_\nu = B_\nu - l_\nu \frac{dB_\nu}{dx} + \dots,$$

ahol x valamilyen hosszúságkoordináta. Ha kihasználjuk, hogy

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\rho\kappa_\nu},$$

akkor

$$I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dx} + \dots$$

Ha figyelembe vesszük, hogy az intenzitás a hőmérséklet függvénye, akkor

$$\frac{dB_\nu}{dx} = \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dx} = \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr} \cos(\theta),$$

ha a θ a csillag középpontjából az adott helyre mutató rádiuszvektorral bezárt szög. A makroszkopikus hőáram-sűrűség nem más, mint a csillag teljes sugárzási fluxusa²:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{rad} = \pi F = \int_0^\infty \int_\Omega I_\nu \cos(\theta) d\Omega d\nu.$$

Ha az I_ν fenti közelítését a sugárzási fluxus képletébe helyettesítjük, majd kihasználjuk a B_ν izotrópiáját a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{rad} &= \iint B_\nu \cos\theta d\Omega d\nu - \frac{dT}{dr} \iint \frac{1}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \cos^2\theta d\Omega d\nu = \\ &= -\frac{dT}{dr} \int \frac{1}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \cos^2\theta d(\cos\theta) d\phi = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{1}{\rho\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu. \end{aligned}$$

A sugárzási hőterjedést kifejező állandó ezek alapján

$$\chi_r = -\mathbf{F}_{rad} \left(\frac{dT}{dr} \right)^{-1} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho\bar{\kappa}},$$

ahol

² Jelen esetben a sugárzás $I_\nu(\theta, \phi)$ intenzitását úgy értelmezzük, hogy a $(\nu, \nu + d\nu)$ frekvencia-intervallumban, a θ, ϕ polárszögekkel jellemzett irány körüli $d\omega$ térszögbe terjedő sugárzás által a θ, ϕ normálisú $d\sigma$ felületen dt idő alatt átvitt energia:

$$dE_\nu = I_\nu d\nu dt d\omega d\sigma.$$

Egy kiválasztott $d\sigma$ felületelemen dt idő alatt átáramló teljes energia:

$$\pi F_\nu dt d\sigma = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_\nu dt d\sigma d(\cos\theta) d\phi d\nu,$$

ahol πF_ν a sugárzási fluxus.

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} = \frac{\pi}{acT^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu.$$

A $\bar{\kappa}$ mennyiséget Rosseland-féle átlagos opacitásnak (anyag átlátszósága az elektromágneses sugárzással szemben) nevezik, értéke bonyolult kinetikai számításokból határozható meg, bár bizonyos egyszerű esetekre léteznek közelítő képletek, a gyakorlatban $\bar{\kappa}$, ρ , T és a kémiai összetétel függvényében táblázatba van foglalva.

Az egyenleteink egyszerűbb alakára hozása végett érdemes bevezetni a folyó luminozitást:

$$L(r) = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon_N(\rho, T) dr,$$

ezzel, illetve a hővezetési tényező opacitással kifejezett képletével a csillaganyag szerkezetére vonatkozó egyenletek a következő egyszerű alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -G\rho \frac{M(r)}{r^2}; \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho; \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3}{4ac} \frac{\rho \bar{\kappa}}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}; \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \varepsilon_N. \end{aligned}$$

Az ismeretlen függvények: ρ , P , T , L , M . Még ne feledkezzünk meg az állapotegyenletről, amely a nyomás és a hőmérséklet között teremt korrelációt. A csillagállapotot megadó differenciálegyenletek akkor lesznek egyértelműek, ha megadjuk a peremfeltételeket. A legegyszerűbb peremfeltételek az ún. zero-határfeltételek:

$$\begin{aligned} L(0) &= 0; & T(R) &= 0; \\ M(0) &= 0; & P(R) &= 0; \end{aligned}$$

A fenti határfeltételek közül az R helyen kiszabott értékek csak közelítők lehetnek, mivel a felszín közelében nem biztosított a termodinamikai egyensúly. Azonban kimutatható, hogy ha a csillag felszínétől befelé haladva az opacitás lassan változó függvény, akkor az R helyen vett peremfeltétel nem befolyásolja jelentősen a csillag szerkezetét. A forróbb csillagokban ez a közelítés viszonylag nagy pontossággal használható.

Az egyenletek és a hozzájuk tartozó peremfeltételek együttesen általában egyértelmű megoldást adnak: adott R sugár esetén az egész csillag szerkezete adott. Természetesen ennek a megfordítottja is igaz, azaz adott kémiai összetételű szférikus csillag szerkezetét egyetlen globális paraméter egyértelműen meghatározza. Ez a Vogt-Russell tétel, amely vegyük észre a HRD diagram ágszerkezetét és a tömeg-fényesség relációt is egyszerre megmagyarázza. Vegyük észre, hogy az ágszerkezet egydimenziós jellege az egyetlen

globális paraméternek felel meg, a különböző ágak, pedig az eltérő kémiai összetétel következményei.

3.3.2. Kvázi hidrosztatikus egyensúly (QHE) és hidrosztatikus egyensúly (HE)

Mint már a viriál-tétel segítségével sikerült egyszerűen belátni, hogy a gravitációs összehúzódás következtében a csillag (gázfelhő) hőmérséklete növekszik. Az összehúzódás azonban nem tart örökké, egy bizonyos idő elteltével olyan erők lépnek fel amelyek a kontrakció ellen hatnak. Vegyük a csillag Δr vastagságú, $\Delta M = \rho 4\pi r^2 \Delta r = \rho \Delta V$ tömegű gömbhéjára ható erőket: egyrészt megjelenik a csillag középpontjába mutató gravitációs erő

$$F_g = -G \frac{M \Delta M}{r^2},$$

másrészt a csillag összenyomott anyaga nyomásából eredő kifelé mutató (radiális) erő:

$$F_p = 4\pi r^2 \Delta P.$$

A gömbhéjra ható erők eredője (ΔF) a két erő összege, így könnyen felírható a gömbhéj gyorsulása:

$$\Delta F = a \Delta M \Rightarrow a = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta r} - \frac{GM}{r^2}.$$

A protocsillag fejlődése ekkor három lehetőség szerint változhat:

1. $a = 0$; ez a tökéletes egyensúly uralkodik

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{GM\rho}{r^2}.$$

2. $a \sim 0$; ez az állapot a QHE. Értelemszerűen, ha $a > 0$ akkor tágulásról van szó, ha $a < 0$ akkor a rendszer összehúzódik, de mindkét esetben rövid időn belül újra helyreáll az egyensúly.
3. $a \ll 0$; ebben az esetben szinte szabadeséssel húzódik össze a rendszer.

Láthattuk, hogy hidrosztatikus egyensúly esetében a gáz nyomásgradiense teljes egyensúlyban van a csillag anyagának gravitációs erejével. Vizsgáljuk meg mi szükséges az egyensúly kialakulásához.

Az összehúzódó gázfelhőben a részecskék kinetikus energiája fokozatosan növekedik, így nő a rendszer hőmérséklete. A hőmérséklet növekedésének egyik akadályozó mechanizmusa az, hogy az egyre intenzívebb és egyre nagyobb energiájú molekulák az ütközések miatt atomokká esnek szét, majd ezek az atomok ionizálódnak. Mint ismeretes mindkét folyamathoz meghatározott energiát kell befektetni:



Amikor a fent vázolt folyamatok beindulnak a rendszer kontrakciója felgyorsul, mivel a gáz termikus energiája az ionizációra fordítódik, és így a nyomás nem lesz elég nagy ahhoz, hogy ellensúlyozza a gravitációs erőt. A példa kedvéért vegyünk egy M tömegű gázfelhőt, ekkor a disszociációra és az ionizációra fordított energia az

$$E_d = \frac{M}{m_H} N_A \cdot 13,6 eV + \frac{M}{2m_H} N_A \cdot 2 eV = \frac{3}{2} \frac{M}{m_H} N_A k_B T_d$$

összefüggéssel számítható, ahol N_A az Avogadro-szám. Az ennek az energiának megfelelő hőmérséklet $T_d \sim 6 \cdot 10^6 K$. A rendszer teljes energiája ilyenkor a kinetikus energia, a potenciális energia és a disszociációs energia összege:

$$E_k + \Omega + E_d = 0,$$

ahol a potenciális energiát a viriállal fejeztük ki, amelyet megtehetünk a centrális erőter miatt. Mi most arra vagyunk kíváncsiak, hogy mily annak a rendszernek a tulajdonsága, amely hidrosztatikus egyensúlyban van. Az egyensúly feltétele a viriál-tétel értelmében

$$2E_k + \Omega = 0.$$

A fentiek alapján a disszociációs energia:

$$E_d = -\frac{\Omega}{2} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{2R_d},$$

amelyből a fentiek alapján kifejezhető a teljes disszipáció utáni hidrosztatikai egyensúlyban lévő rendszer sugara:

$$R_d = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{2E_d} = \frac{1}{5} \frac{Gm_H}{N_A k_B} \frac{M}{T_d} \sim \frac{M}{T_d}.$$

Tehát láthatjuk, hogy a hidrosztatikus egyensúlyban lévő rendszer sugarát a tömeg és a disszipációs hőmérséklet egyértelműen meghatározza. Például egy Nap tömeg csillag sugara ilyenkor $\sim 40R_N$.

Az összehúzódás során felszabaduló potenciális energiát a foton közvetítik. Mint láttuk a QHE és HE kialakulásához elegendően nagy nyomásra van szükség, amely a hőmérséklet függvénye. A nagyobb nyomáshoz nagyobb hőmérséklet szükséges, ehhez pedig az szükséges, hogy a keletkezett fotonok a csillag anyagával kölcsönhatásba lépjenek, a lehetséges kölcsönhatások:

1. Fotóeffektus ($E_\gamma > 13.6 eV$),
2. Compton-szórás ($0.01 MeV < E_\gamma < 1 MeV$),
3. Párkeltés ($2 \cdot 511 keV < E_\gamma$),
4. Inverz fékezési sugárzás az atommag terében.

Amennyiben $T < 10^4 K$ a részecskéknek nincs elegendő energiájuk ahhoz, hogy a fenti folyamatok bekövetkezzenek, főleg a felszínen, ahol a hőmérséklet még alacsonyabb. Ha a csillag belső hőmérséklete $T > 10^6 K$ a 2. ill. a 3. folyamat már megindul, azonban ezek

melegítési hatásfoka nem túl nagy. A hőmérséklet további emelkedésével mind a 4 folyamat egyre intenzívebbé válik, ezzel fokozatosan melegítve a csillag anyagát. Azt mondhatjuk, hogy egy főágbeli csillagban az átlagos szabad úthossz $\sim 10^{-4}$ m, a foton bolyongási ideje így a keletkezéstől a felszín elhagyásáig $\sim 10^6$ év. Természetesen ez az idő erősen függ a csillag tömegétől és hőmérsékletétől, ezért ez csak egy viszonyszám a Napszerű, főágbeli csillagok esetére. A lényeg, hogy a sugárzási hőtranszporttal igen lassan valósul meg a hidrosztatikus egyensúly.

3.3.3. Csillagok a főágban és a főág után

Amikor a csillagok a főágba lépnek már a pp-lánc termeli a kontrakció ellenében szükséges energiát, valamint biztosítja a sugárzási energiavesztésüket. Ekkor a rendszer hidrosztatikai és közel termodinamikai egyensúlyban van. Amikor a csillagfejlődés során a magban lejátszódó pp-láncok révén a magban lévő protonok héliummá alakulnak. A hélium magtörzsét ekkor egy hidrogén gyűrű veszi körbe, mivel a felületi rétegek hőmérséklete ott még nem tudta begyűjtani a hidrogént. Mekkora lehet ebben az esetben a törzs tömege?

Tegyük fel, hogy a kérdéses centrum ideális héliumgázból áll. Ekkor a véges nyomású rendszerre felírható viriál-tétel értelmében (Appendix D):

$$2E_k + \Omega = 4\pi R^3 P_f,$$

ahol P_f a felületi nyomás. Tudjuk, hogy a kinetikus energia $E_k \sim M_c T_c$ (ahol M_c a törzs tömege, T_c a törzs hőmérséklete), valamint $\Omega \sim \frac{M_c^2}{R_c}$, így a fenti kifejezéssel egy összefüggést kapunk a felületi nyomásra:

$$P_f = C_1 \frac{M_c T_c}{R_c^3} - C_2 \frac{M_c^2}{R_c^4}.$$

ahol C_1 és C_2 állandók. Az egyszerűség kedvéért vegyük azt, hogy a törzs felületi hőmérséklete megegyezik a törzs hőmérsékletével, amely megegyezik a külső burk hőmérsékletével, ahol éppen beindult a hidrogénégés, tehát $T_c = T_H$ (ezek a közelítések az egyensúlyhoz közeli állapot miatt nem annyira pontatlanok). Legyen a törzs tömege adott, ebben az esetben a maximális felületi nyomáshoz tartozó sugár egyszerű szélsőérték-számítással meghatározható:

$$\left. \frac{dP_f}{dR_c} \right|_{M_c = \text{áll}} = 0 \Rightarrow R_{c,m} \sim \frac{M_c}{T_H},$$

Az ehhez a sugárhoz tartozó maximális nyomás kifejezhető a sugárral és a tömeggel:

$$P_{f,\max} \sim \hat{C}_1 \frac{M_c^2}{R_{f,m}^4} - \hat{C}_2 \frac{M_c^2}{R_{f,m}^4} = C_3 \frac{M_c^2}{R_{f,m}^4}.$$

A törzsen kívüli gömbhéj a gravitációs nyomást gyakorol a törzs felszínére:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{-G \frac{M_c M^*}{R_{f,m}^2}}{4\pi R_{f,m}^2} = -C_4 \frac{M_c M^*}{R_{f,m}^4}.$$

A csillag csak akkor stabil, ha $P + P_{f,\max} \geq 0$, ellenkező esetben a törzs összeroppan a külső burok gravitációja miatt. Ez a következő feltételt eredményezi:

$$P_{f,\max} \geq -P \Rightarrow q_0 \equiv \frac{M_c}{M^*} \geq q_{sc} = \frac{C_4}{C_3},$$

ahol q_{sc} a *Schönberg-Chandrasekhar-határ*. Ha tehát a csillag tömegviszonyai nem teljesítik a fenti feltételt, akkor a csillag összeroppan a saját gravitációja következtében. Megmutatható, hogy egy adott tömegű törzs sugara akkor maximális, ha a törzset alkotó gáz ideális, és akkor minimális, ha a degenerált a gáz. A Chandrasekhar-tömeghatár tipikus értéke $\sim M < 1,4 M_N$.

A főágban „élő” csillagok energiatermelése a pp-láncon és a CNO-cikluson keresztül valósul meg. A további fejlődést döntően befolyásolja a csillag tömege, hiszen aszerint dominál a két energiatermelő folyamat, ill. változik a hőmérséklet. Ezért a továbbiakban külön kezeljük a kis tömegű ($M < 2,5-8 M_N$) és a nagy tömegű csillagokat.

A nagy tömegű csillagokban az energiatermelés főleg a CNO ciklusból származik (1 körfolyamat során felszabaduló energia $\sim 25,2$ MeV). Ezekben a csillagokban a nagy tömeg miatt értelemszerűen nagyobb a centrális hőmérséklet. A hőmérséklet-eloszlás is egyenlőtlen a centrum és a burok között, ezért konvekciós áramlás indul a melegebb törzs felől a felszínre. Ez az áramlás kémiai összetételt is megváltoztatja, hiszen nehezebb magok kerülnek a burokba. A nagy tömegű csillagokban a hidrogénégés során a hőmérsékletnövekedés kisebb, mint a kis tömegű csillagok esetében. (kell ábra a HRD-ről)

Kistömegűnek nevezzük a csillagot, ha születésekor nem éri el a 8 naptömeget. Mivel a csillag tömege kicsi és ezért saját gravitációs ereje nem nyomja annyira össze, mint nagytömegű társait, a centrumban a hőmérséklet "csupán" 5-10 millió fokra emelkedik. A csillagok életük első, leghosszabb szakaszában, amíg még a Hertzsprung-Russel-diagram (HRD) főágán tartózkodnak, csak a hidrogén-fúzió termel energiát. Mint megismertük, a hidrogén-fúzió két eltérő sebességű és ezért eltérő hatékonyságú formája jelenhet meg a csillagokban. A kistömegű csillagokban az pp-ciklus termel több energiát, ennek során lényegében két hidrogénmagból egy héliummag keletkezik, miközben a hélium- és a hidrogénmag nyugalmi tömege közti különbség energiaként (fotonok és neutrínók formájában) szabadul fel. Ez a folyamat csak a csillag magjában, tömegének 12%-ában zajlik.

Ahogy a csillag folyamatosan használja fel hidrogénjét, hőmérséklete lassan emelkedik. A csillag magja lassan kezd átalakulni héliummá, melyet egy hidrogénburok vesz körül. Mivel ekkor még a hélium nem tud fuzionálni, hiszen a hőmérséklet ehhez még alacsony, és a hidrogén már kifogyott a magból, tehát az energiatermelés átmenetileg megszűnik a centrumban, a csillag magja zsugorodni kezd. Eközben gravitációs energia szabadul fel, ami a magot körülvevő vékony héjban annyira felmelegíti a hidrogént, hogy ott, a centrumban korábban zajló fúziós folyamatokhoz hasonló hidrogénégető reakciók jönnek

létre. Mivel a csillag törzse ekkor felmelegszik, olyan áramlások indulnak el, melynek során a törzs anyaga, tehát a hidrogénfúzió végterméke, a forró hélium feláramlik a burokba. Ez az úgynevezett konvekciós áramlás felmelegíti a csillagburkot és felfújja azt. A csillag felszíne megnövekszik, hőmérséklete csökken, így színe vörössé válik, ám fényessége ekkor még jelentősen nem változik, vízszintesen jobbra tolódik a HRD-n. Később a konvekciós áramlás jelentősen felmelegíti a csillagburkot, a csillag felfúvódik és vörös óriás csillaggá válik. E felfúvódás közben azonban a burok hőmérséklete lecsökken, a hidrogén (itt nem folyt fúziós reakció, tehát megmaradt) ionizációja is megszűnik (hidrogén atomok alakulnak ki), ami energia felszabadulással jár. A burokban megnövekszik a nyomás, s egy része elszakad a csillagtól, és látványos úgynevezett planetáris ködök alakulnak ki. Azaz a HRD-n követve a csillag fejlődését azt látjuk, hogy már nem a főágon helyezkedik el, hanem a vörös óriáságon. A csillag fokozatos felfúvódása során egy milliárd év alatt fényessége 1000-szerese lesz a korábbiaknak. Mivel a csillag nem túl nagy, a gravitáció nem tudja lényegesen összenyomni és felmelegíteni a magot, ezért az tovább zsugorodik. Az igen nagy sűrűségű, de mégsem túl forró anyagban az elektrongáz viselkedése megváltozik, és a gáz zsugorodása már nem a hőmérséklet emelkedését fogja eredményezni, hanem a sűrűségét. Ezt úgy mondjuk, hogy az anyag elfajul. Ennek következtében viszonylag alacsony hőmérsékleten (amely a hélium-fúzióhoz nem elég magas) a mag zsugorodását meg tudja állítani az elfajult anyag nyomása. A csillag magja ekkor tehát hidrosztatikus állapotban van, míg körülötte egy vékony héjban hidrogénfúzió folyik. S ez nem csak a burkot melegíti és fújja fel, hanem megnöveli a csillagmag nyomását is. A nyomás addig növekszik a magban, míg az elfajult állapot megszűnik, s a hőmérséklet hirtelen olyan magasra szökik, hogy a hélium-fúzió robbanásszerűen beindul. Ezt hélium felvillanásnak nevezzük. Ennek következtében a mag kitágul, sűrűsége lecsökken, és az anyag elfajult állapota megszűnik, így hőmérséklete tovább emelkedhet. Ám ha túlságosan kitágul emiatt a mag, akkor lecsökkenhet megint a hőmérséklet, és újra elfajulhat az anyag, ami az energiatermelés átmeneti megszűntét eredményezi. A hélium-felvillanás folyamata ekkor megismétlődhet, amit mi úgy észlelhetünk, hogy a vörös óriás csillag pulzálva változtatja fényességét. Minden egyes pulzációs periódusban átmenetileg megnő a csillag magjából a burokba szállított hő, ekkor nagy mennyiségű anyag távozhat a burokból, planetáris ködöt létrehozva a csillag körül.

A HRD-n történő fejlődését követve, kistömegű csillagunk vörös óriás állapotbeli pulzálásai következtében folyamatosan veszít anyagából. Közben a magban a hélium-fúzió eredményeként szén keletkezik. Ha a csillag tömege kisebb, mint 8 naptömeg, a folyamatos tömegvesztés oda vezet, hogy mire a magban kifogy a fuzionálni képes hélium, az energiatermelés végleg megszűnik benne. A csillag zsugorodni kezd, eközben a burok felmelegszik, ezért színe fehérré válik. A csillag a HRD jobb felső sarkából (a vörös óriás ágról) átlósan elindul a bal alsó sarokba, és fehér törpecsillag lesz belőle. (kell ábra a HRD-ről)

Mivel tömege ekkorra már kicsi, zsugorodása közben nem tud annyira felmelegedni, hogy a fúziós folyamatok további nehezebb magokat termeljenek. Anyagi összetétele ekkor már nem változik. Magjában szén, oxigén, az ezt körülvevő héjban pedig a héliummagok dominálnak. Ekkorra a hidrogén lényegében vagy héliummá alakult, vagy ledobódott a csillagról. A csillag további fejlődése lényegében csak attól függ, hogy csillagunk magányos-e, vagy van kísérője. Amennyiben magányos, az fehér törpecsillag évmilliárdokon keresztül tartó folyamatos hűlés és zsugorodás közben lassan, de biztosan eltűnik szemünk elől. Ám, ha volt társa, akkor igen látványos égi jelenséget produkálva,

felrobbanhat, amit I. típusú szupernóva-robbanásnak (lásd Ia típusú szupernóva-robbanás) nevezünk.

3.3.4. Ia típusú szupernóva-robbanás

A 8 naptömegnél kisebb tömeggel születő csillagok a vörös óriás fázisban annyi anyagot veszítenek, hogy tömegük kisebb lesz, mint a Chandrasekar-féle tömeghatár. Mivel a kistömegű csillag centrumában a hőmérséklet alacsonyabb, mint a nagytömegű csillagokéban, a fúziós folyamatok csak a szén ill. oxigén atomok keletkezéséig folynak. A nukleáris energiatermelés megszűnte miatt kialakuló alacsony hőmérséklet és az összehúzódás következtében a csillag magjában lévő elektrongáz elfajulttá válik. A csillag további sorsa ezek után már környezete tulajdonságaitól fog függeni. Amennyiben a fehér törpe egy bináris rendszer tagja, akkor a társcsillagától anyagot nyelhet el (ezt akkréciónak nevezzük), és az anyagátadási rátától függően észlelhetünk visszatérő nóvakitöréseket, röntgen kitöréseket, vagy I típusú szupernóva-robbanást. A társcsillag köpenyében még meglévő hidrogén ill. hélium a fehér törpére hull, akkréciós korong alakul ki. Ennek felszínén, az időnként a hidrogén fuzionál, s ezt a fényfelvillanást észlelhetjük a nóvakitörések során. Az I. típusú szupernóva-robbanások során a visszafordíthatatlan összeomlás mindig akkor indul el, amikor az akretálódott anyag felgyülemlik, és a fehér törpe tömege 1.4 naptömeg fölé emelkedik.

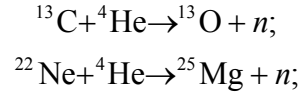
Az 1960-as években Fred Hoyle és Fowler dolgozták ki a jelenség elméletét. Ennek lényege, hogy a fehér törpe elfajult magjának termonukleáris robbanása leveti a csillag burkát. A csillag összeomlása során az elfajult mag sűrűsége hirtelen megnő, a szén és oxigén magok nikkellé fuzionálnak, miközben hatalmas mennyiségű energia szabadul fel. Ekkor a csillag fényessége másodpercek alatt hirtelen több százmilliószorosára növekszik, majd hónapok alatt exponenciális ütemben halványodik. A robbanásban felszabaduló hatalmas energia eredményeként a csillagot tartalmazó egész galaxisnál közel százszor fényesebb jelenséget látunk.

A halványodó maradvány fényességét a robbanásban keletkező 0.5-0.8 naptömegnyi radioaktív ^{56}Ni magok (56 napos felezési idejű) ^{56}Co (77 napos felezési idejű) magokká, illetve annak ^{56}Fe magokká történő bomlása során felszabaduló gamma-fotonok határozzák meg. A 10000 km/s sebességgel ledobódó csillagköpeny spektrumában fényességmaximumkor Ca, Si, S, Mg, O, és Co atomok figyelhetők meg. Az I. típusú szupernóva-robbanás spektrumában nem találhatunk hidrogén vonalakat, aminek a magyarázata egyszerű. A robbanó fehér törpecsillagban már nincs hidrogén (a magjában már elégett, a külső burkát viszont már ledobta korábban a vörös óriás állapotban). A társcsillagról átvándorolt anyagban még lehet hidrogén, de az akkréció során az még a fehér törpére történő beesés előtt héliummá fuzionál.

3.3.5. II típusú szupernóva-robbanás

A szisztematikus észlelések megkezdése óta évente 10-20 szupernóva-robbanást is felfedeznek távoli extragalaxisokban, míg a Tejútrendszerben átlagosan csak 100 évente jelenik meg egy. Közel minden második szupernóva-robbanás az I. típustól eltérő jellegzetességekkel bír. Ellentétben az I. típusúval, a II. típusú robbanás spektrumában hidrogénvonalak is láthatóak. A II. típus halványabb kifényesedést produkál, fényessége egy nagyságrenddel kisebb, mint az I. típusé.

A II típusú szupernóva-robbanásnak 3 jól elkülöníthető fázisa van: 1. a preszupernóva kialakulás; 2. a kollapszus; 3. maga a robbanás. A preszupernóva fázisban a csillag anyagában a pp-lánc és CNO-ciklus révén folyamatos az energiatermelés, valamint a fúziós reakciók egyre inkább vas felé alakítják az anyagot. A pp-lánc mellékágaiban sok olyan magreakció zajlik le, amely fontos neutronforrásként szerepel:



A nagytömegű (8 naptömegeknél nagyobb) csillagok magjában a szilícium elfogyásával energiatermelő magreakció már nem tud létrejönni. Az energiatermelő magreakciók hiánya következtében a sugárzás okozta nyomás megszűnik, és a hidrosztatikai egyensúly a továbbiakban, már nem tud fennmaradni. Egy masszív, 10 naptömegű csillagban már 10^6 év alatt kifogy a nukleáris tüzelőanyag. A csillagtörzsben kialakulnak a vas körüli elemek. A középpontból kifelé haladva az egyre könnyebb elemek hagymahéjszerű rétegei veszik körül a magot. A hidrosztatikai egyensúly megszűntekor a csillag saját gravitációs tere hatására zsugorodni kezd. Így a csillag vasmagja egy összeomló, forró, fehér törpeszerű állapotba kerül.

Az összeomló csillagtörzs nyomását ekkor még az elfajult csillagmag elektronjai határozzák meg. A felszabaduló gravitációs potenciális energia a csillaganyag belső energiáját növeli mindaddig, amíg magfizikai folyamatokban keletkező részecskék nem tudják ezt az energiát elszállítani. Az összeomlás miatt növekszik a hőmérséklet, a vasmagok kis része felhasad, ami növelné a nyomást. A vasmagok széthasításához energia kell, így az anyag belső energiája csökkenni fog. A vasmagok felhasadásakor keletkezett pozitronokból elektron befogás során neutronok és neutrínók keletkeznek, aminek következtében csökken az elektrongáz nyomása és az összeomlás felgyorsul. Az elektronbefogás során keletkezett neutrínók ekkor még kijutnak a csillagból. Az összeomlás akkor lassul le, ha a sűrűségnövekedés miatt a neutrínók már kölcsönhatnak az elektronokkal, meggátolva azok befogódását. Ezzel a csillag gravitációs kollapszusának első szakasza befejeződik.

A kollapszus tovább folytatódik egészen addig, amíg a csillagtörzs centrális sűrűsége el nem éri az atommagok sűrűségét, $2,7 \cdot 10^{14}$ g/cm³ értéket. A vasmagok ekkor szétolvadnak, és maganyag keletkezik. A csillagtörzs ekkor olyan, mint egy hatalmas atommag. Ez az anyag már nem tud tovább összenyomódni, a beáramló anyag hirtelen megáll és visszapattan a törzs felületéről, lökéshullám keletkezik. A lökéshullám a csillagtörzsben feltöri a vasmagokat, eközben a felületéig jutva elveszti energiáját és lelassul.

Ha a lökéshullám vasmagokat felbontó hatását nem vennénk figyelembe, akkor a lökéshullám kijutna a vastörzsből, és levetné a csillag burkát. Valójában a lökéshullám körülbelül 100-300 km-re a középponttól leáll. A visszamaradt csillagtörzs neutroncsillaggá alakul, de ekkor még forró. A forró neutroncsillag lehűl és tovább zsugorodik, végül 1,4 naptömegű közel 30 km sugarú neutroncsillag jön létre. A forró és a hideg neutroncsillag gravitációs potenciális energiájának különbsége neutrínók formájában sugárzódik ki. Ezen neutrínóknak az anyaggal történő igen gyenge kölcsönhatása révén (minden ezredik neutrínó lép kölcsönhatásba a behulló anyaggal) újraéled a lökéshullám, ezt hívjuk neutrínófűtésnek. A neutrínók felmelegítik a neutroncsillag felszínén az anyagot, ahol konvekciós áramlások alakulnak ki. A konvekció során a behulló, alacsony energiájú anyag a kiáramló forró buborékokon keresztül jut a

neutroncsillag felületére. A buborékokban felfelé áramló forró anyag energiát ad át a lelassult lökéshullámnak. Az így újraéledt lökéshullám 500-3000 km között felmelegíti az anyagot, ahol robbanásos magreakciók zajlanak. 3000 km felett a lökéshullám maga előtt szállítva a burok anyagát szabadon kijuthat a csillag felületére, és felrobbantja a csillagot.

A II. típusú szupernóva-robbanás szülőcsillaga még számottevő hidrogénburokkal rendelkezik, hiszen magjában ugyan kifogyott, de a burok teljes anyagát nagy tömege miatt nem tudta ledobni a vörös óriás állapotban. Ezért a szupernóva színképében, kezdetben abszorpciós, majd emissziós hidrogénvonalak is észlelhetők. A fenti folyamatok következtében kidobódott anyag hülése során a hidrogén rekombinálódásakor (az ionizált hidrogén a hőmérséklet csökkenése miatt visszanyeri elektronját és semleges hidrogénatom jön létre) optikailag vékonyvá válik. A fotoszféra kezdetben a burok anyagával együtt tágul és hül, ezért a fényesség a maximumot követő első napokban visszaesik. A rekombináció bekövetkezése után a fotoszféra a rekombinációs fronttal esik egybe, amely a kiáramló anyaghoz képest befelé mozog, így az közel állandó sugarú marad. Mivel állandó mennyiségű anyagutánpótlást kap, ezért a ledobódó fotoszféra néhány hónapig állandó fényességű marad. Végül a hidrogénben gazdag réteg kiáramlása után a front eltűnik, a fényesség pedig csökkenni kezd. A robbanáskor keletkezett nagy mennyiségű radioaktív izotóp bomlása ($^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$) még tovább fűti a gázt, így a fényességcsökkenés exponenciális ütemű.

Mivel a csillag összeomlásakor se a mágneses energiája, se az impulzusmomentuma nem változhat meg, a robbanásban keletkezett neutroncsillag szédítő sebességgel forog, és óriási mágneses tere van. Mivel a hátramaradt neutroncsillag sugárzása révén további energiát táplál a maradványködbe, az még évezredekig látható. A köd általában középen a legfényesebb és a szélei felé halványabb. Ezeket hívjuk plerion típusú ködöknek, amelyeknek legismertebb példája a Rák-köd.

3.4. A neutroncsillag

A nagy tömegű csillagok esetén ($M^* > 8 M_N$) szupernóva-robbanás következik be, miután a csillaganyag nagy része kilöködik az űrbe, a visszamaradó sűrű törzs, a tömegétől függően vagy fekete lyuk vagy neutroncsillag lesz. A továbbiakban az utóbbit részleteiben tárgyaljuk.

A neutroncsillagok megfigyelése a nagyon gyors forgásuk és mágneses terük következtében kialakult pulzációs sugárzásuk vagy kettős rendszer esetében az akkréciós sugárzásuk révén lehetséges. Ezekből a megfigyelésekből manapság nagyon pontos információkat kaphatunk a neutroncsillag tömegére, sugarára és mágneses terére vonatkozólag. A mérések alapján elmondhatjuk, hogy a neutroncsillagok maximális tömege, ha nem forog, $M \approx 1,3 - 1,7 M_N$, ha forog $\sim 2,5 M_N$, a sugara $\sim 10-20$ km, mágneses terének nagysága $\sim 10^8$ T (hogy érzékeljük ennek az értéknek a nagyságát, emlékezzünk vissza, hogy a Föld mágneses ter $\sim 10^{-4}$ T, ill. a laboratóriumban előállítható mágneses terek nagyságrendje ~ 10 T).

A neutroncsillag kialakulását lényegében az összeomló csillag óriási nyomása teszi lehetővé. Ugyanis a sűrűség olyan hatalmas lesz, hogy a protonok és elektronok egymásba préselődnek, neutron keletkezik, miközben neutrínók sugárzódnak ki. A neutroncsillag sűrűsége $2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, mintha egy kockacukorba zsúfolnánk be a Földön használatban levő összes személyautót. A neutroncsillag neutrínó kibocsátás révén hűlni kezd, de közel

100 évig még több millió fokos. A neutroncsillag ekkor még hatalmas mennyiségű röntgensugárzást bocsát ki, ami felmelegíti a csillag korábban ledobott burkát és világítani kezd. Közel egymillió év alatt a neutroncsillag 10000 fokra hűl, amikor már a táguló burok is óriásira nőtt és ritkává vált.

3.4.1. A neutroncsillag tömege, mérete

Az előzőekben említettük, hogy a neutroncsillagok mérete és tömege nem lehet tetszőleges, ha ugyanis kicsi a tömeg, akkor a kollapszus nem lehet olyan intenzív, hogy szupernóva-robbanást követően a megmaradó csillaganyagot alkotó protonok, ill. elektronok a gravitációs összenyomás hatására neutronokká alakuljanak gyenge kölcsönhatással. Ha pedig túl nagy a tömeg, akkor az összehúzódás nem áll meg a neutroncsillag állapotban, hanem tovább nyomódik, megszüntetve ezáltal a neutron állapotot, egészen addig míg kialakul a tér-idő szingularitás, azaz a fekete lyuk. Felmerül a kérdés, hogy a neutroncsillag tömegét hogyan is lehetne meghatározni?

A neutroncsillag tömegének meghatározásához az extrém nagy tömeg és energiasűrűség miatt az általános relativitáselmülethez kell nyúlnunk. Az összeroppanó csillaganyagot relativisztikusan degenerált gázként közelítve kell megoldanunk az Einstein-egyenletet, melyben a metrikát jó közelítéssel vehetjük a statikus, gömbszimmetrikus térszerkezetet jellemző Schwarzschild metrikának. Ekkor a téregyenlet leegyszerűsíthető az Oppenheimer-Volkoff egyenletre:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{G}{r^2} \frac{M(r) + 4\pi r^3 P c^{-2}}{1 - 2 \frac{GM(r)}{rc^2}},$$

ahol P a csillaganyag nyomása, G a gravitációs állandó. Ha ismerjük a $P(\rho)$ állapotegyenletet, akkor a fenti egyenletet megoldva megkapjuk a csillaganyag tömegét. Az egyenlet feltételeinek ismertetése valamint a megoldás menete messze túlmutat ezen előadás keretein, viszont egy egyszerű kvantummechanikai alapokon nyugvó megközelítéssel már nagyságrendileg jó eredményeket kaphatunk.

Meddig tarthat a kollapszus? Ez az első kérdés, amelyet tisztáznunk kell. A csillagfejlődés végstádiumáról tudjuk, hogy a szupernóva-robbanás utáni csillaganyag nagy része proton és elektron, a gravitációs kontrakció miatt ezek a részecskék nagy kinetikus energiával rendelkeznek (a kollapszus miatt nő a hőmérséklet) olyan közel kerülnek egymáshoz, hogy a gyenge kölcsönhatás következtében neutronná és neutrínóvá alakulnak. A neutrínók elhagyják a preneutroncsillagot, energiát visznek ki a rendszerből, ezáltal beindul egy hűlési folyamat is, míg a neutronok a csillag belsejében maradnak. Végeredményen azt tapasztaljuk, hogy a rendszer magjában egyre több neutron keletkezik. A kérdés újr felmerül: Meddig nyomódhat össze az így keletkezett neutronanyag? A válasz egyszerű, amíg a kvantumnyüzsgés engedi! Mint tudjuk, ha egy részecskét erősen lokalizálunk, azaz csökkentjük a hely bizonytalanságát, akkor a Heisenberg-féle határozatlansági reláció értelmében az impulzus bizonytalansága megnő:

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar.$$

Az impulzussal rendelkező részecskék makroszkopikusan nyomást fejtenek ki, ez a nyomás lesz az, amely egyensúlyt tart az összeroppanó csillag gravitációs nyomásával. A következőkben három speciális esetben vizsgáljuk meg a neutroncsillag tömegét: először a csillag sűrűségét állandónak tekintjük (0. közelítés), másodsor a sűrűséget a centrumtól mért távolság lineárisan csökkenő függvényeként (1. közelítés), majd végül annak exponenciális függvényeként vizsgáljuk (2. közelítés). A számítások során nem vesszük figyelembe a csillag forgását. A forgás miatt fellépő inercia erők (centrifugális erő) miatt értelemszerűen csökken a gravitációs nyomás, így nagyobb csillagtömeg (nagyobb sűrűség) alakulhat ki. Azonban az a hatás nagyságrendi változást nem okoz.

3.4.1.1. 0. közelítés: állandó sűrűségű neutroncsillag

Amikor neutroncsillag maximális tömegét közelítjük két alapfeltevést kell tennünk:

- a centrumban lévő neutron „bezártsága”, azaz az a mérettartomány, ahova a neutron „be van szorítva” a csillaganyag gravitációja miatt a hidrogén atommag mérettartományába essen: $\Delta x \approx 10^{-14} \text{ m}$;
- a neutroncsillag csak neutronokat tartalmaz, amely a kvantumstatistika és a nagy energiasűrűség miatt relativisztikusan degenerált Fermi-gázként viselkedik (nukleonok közti erős kölcsönhatást nem vesszük figyelembe).

A természetesen az anyagi összetétel nem homogén neutron-eloszlást követ, azonban a gravitációs kontrakció szempontjából tényleg ez a meghatározó. A karakterisztikus mérettartomány tényleg egy nyugalmi protonnal közelíthető (hidrogén atommag), ha ennél kisebbre próbálnánk összenyomni a részecskéket, ez azt jelentené, hogy a neutronokat majdhogynem egymásba préselnénk, ez pedig a csillaganyag összeomlását jelentené.

Első közelítésben a részecskesűrűséget (n) és az anyagi sűrűséget (ρ) homogénnek tekintjük. A csillag méretét az határozza meg, hogy a homogén Fermi-gáz nyomása mekkora gravitációs nyomással képes még egyensúlyt tartani.

Első lépésben határozzuk meg a Fermi-gáz nyomását. Ehhez szükségünk van az adott rendszer Fermi-energiájára (E_F) és Fermi-impulzusára (p_F). A p_F legyen a lehető legnagyobb impulzus a rendszerben, amelyet a határozatlansági reláció ad meg:

$$p_F = \Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ MeV} \frac{s}{m},$$

az ehhez tartozó Fermi-energia

$$E_F \approx cp_F \approx 21 \text{ MeV} .$$

A Fermi-energia egyértelműen meghatározza az adott energiaeloszlás mellett lehetséges részecskesűrűséget:

$$n \equiv \frac{N}{V} = \int_0^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon ,$$

ahol $g(\varepsilon)$ a szabad neutrongáz térfogategységre eső állapotsűrűsége (m a neutron nyugalmi tömege)

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2},$$

$f(\varepsilon)$ a részecskék energia-eloszlása, mely teljesen degenerált Fermi-gáz esetében

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \varepsilon \leq E_F; \\ 0 & \varepsilon > E_F. \end{cases}$$

A részecskesűrűséget kifejező integrálban az integrálási határt végtelen helyett elég a Fermi-energiáig venni, mivel felette az integrandus értéke azonosan nulla, az integrálás elvégzése után a következő összefüggést kapjuk:

$$n = \int_0^{E_F} g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_F)^{3/2},$$

A kapott Fermi-energiát a fenti képletbe helyettesítve a részecskesűrűségre azt kapjuk, hogy $n \approx 10^{43} m^{-3}$. Ebből a neutroncsillag sűrűsége, feltételezve, hogy minden részecske neutron:

$$\rho = m \cdot n \approx 10^{17} \frac{kg}{m^3} = 10^{14} \frac{g}{cm^3},$$

amely nagyságrendileg valóban megegyezik a neutroncsillagok tömegével. A kérdés az, hogy mekkora lesz a neutrongáz nyomása? Statisztikus fizikai megfontolásokból tudjuk, hogy egy gáz nyomása a belső energia állandó részecskeszám mellett vett térfogat szerinti parciális deriváltjaként számítható:

$$P = \left(\frac{\partial U_0}{\partial V} \right)_N,$$

ahol U_0 a rendszer belső energiája. A belső energiát tekintjük a Fermi-gáz teljes energiájának, azaz

$$U_0 = \int_0^{E_F} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{5} N E_F = \frac{3}{10} \frac{\hbar^2 N}{m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}, n = \frac{N}{V}.$$

A nyomás a definíciót kihasználva:

$$P = - \left(\frac{\partial U_0}{\partial V} \right)_N = \frac{2}{3} V^{-5/3} \frac{3}{10} \frac{\hbar^2 N}{m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2 n}{m} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{2}{5} n E_F.$$

Ez a nyomás tart egyensúlyt a neutroncsillag anyagának gravitációs nyomásával. A gravitáció okozta nyomás (P_g) könnyen kiszámítható, hiszen

$$\nabla P_g(r) = f_g(r) \xrightarrow{\text{gömbszimmetria}} \frac{dP_g}{dr} = f_g(r),$$

ahol $f_g(r) = -G \frac{\rho^2 4\pi r^3}{3r^2} = -G \frac{\rho^2 4\pi r}{3}$ a gravitációs erősűrűség. A csillaganyag teljes nyomását a fenti egyenlet teljes csillag sugarára (R) vett integrálás adja meg:

$$\int_0^R \frac{dP_g}{dr} dr = \int_0^R f_g(r) dr \Rightarrow P_g(0) \equiv P_g = G \frac{\rho^2 4\pi}{3} \int_0^R r dr = G \frac{\rho^2 2\pi}{3} R^2.$$

A számolásakor kihasználtuk, hogy a csillag felszínén nulla a nyomás ($P(R)=0$). Az egyensúly feltétel, hogy a két nyomás kiegyenlítse egymást:

$$P = P_g,$$

azaz

$$\frac{1}{5} \frac{\hbar^2 n}{m} (3\pi^2 n)^{2/3} = G \frac{\rho^2 2\pi}{3} R^2.$$

Vegyük észre, hogy az így kapott egyenletben csak a neutroncsillag sugara (R) ismeretlen, amelyet a már megkapott eredmények alapján könnyedén kiszámíthatunk. Ezzel a sugárra $R \sim 5000$ m-t kapunk. A valóságban a méret pár 10000 m körüli tartományba esik. Ez összhangban van a kapott eredménnyel, hiszen a számolásakor azt feltételeztük, hogy a sűrűség állandó, azaz minden neutron egymáshoz a lehető legközelebb helyezkedik el, míg a valóságban a sűrűség a centrumtól kifelé csökken. Az ez alapján számított tömeg, $M \sim 10^{29}$ kg.

Éppen ezért, a pontosabb modellezés végett a következő két szakaszban két változó sűrűségű neutroncsillagra végezzük el a fenti számítást.

3.4.1.2. 1. közelítés: a neutroncsillag sűrűsége a sugár lineáris függvénye

Az előző szakaszban láthattuk, hogy a homogén anyagsűrűség túl erős feltevés, ezért a következőkben lineárisan csökkenő függvényt alkalmazunk:

$$n(r) = a - \frac{b}{R} r,$$

a fenti paraméterezés azért praktikus, mert így a csökkenés meredekségét egy sűrűség dimenziójú szám (b) jellemzi, R a csillag külső sugara. Az polinom a együtthatóját a sűrűség $r = 0$ helyen vett peremfeltétele határozza meg. Mivel a centrumban a legnagyobb a sűrűség, ezáltal a gravitációs nyomás is, praktikus a következő peremfeltételt kiróni:

$$n(r)|_{r=0} = n_c \Rightarrow a = n_c,$$

ahol n_c az a kritikus sűrűség, amit a homogén sűrűség esetén kiszámítottunk. Így biztosítva van, hogy a centrumban sem „nyomódnak” egymásba a neutronok. A csillag

felszínére vonatkozó peremfeltétel legyen az, hogy a sűrűség a centrum sűrűségének x -ed részére csökken:

$$n(r)|_{r=R} = (1-x)n_c \Rightarrow b = xn_c.$$

A sűrűséget megadó függvény ezzel

$$n(r) = n_c \left(1 - \frac{x}{R}r\right).$$

A sűrűség változása miatt a Fermi-energia és abból származtatva a Fermi-gáz nyomása is helyfüggő lesz. Egyszerűen belátható, hogy a képletek formálisan ugyan azok lesznek, mint homogén anyageloszlás esetében:

$$E_F(r) = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m} (3\pi^2 n(r))^{2/3},$$

a belső energia értelemszerűen nem változik, hiszen energiaváltozó szerint integrálunk, a Fermi-gáz nyomása az állandó részecskeszám mellett vett belső energia térfogat szerinti parciális deriváltja szintén ugyanaz marad:

$$P(r) = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2 n(r)}{m} (3\pi^2 n(r))^{2/3}.$$

A gravitációs nyomásban most már az anyagi sűrűség is lokális mennyiség lesz:

$$\frac{dP_g}{dr} = f(r) = -G \frac{4\pi}{3} r \rho(r)^2,$$

az anyagi sűrűséget a $\rho(r) = m \cdot n(r)$ képlet adja meg, ahol m a neutron tömege. Látható, hogy a rendszerben fellépő nyomások lokális mennyiségek, ezért az egyensúly feltétele szintén lokálisan értelmezendő:

$$dP = dP_g,$$

ahol a teljes differenciálok

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial n} dn = \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} dr, \\ dP_g &= f(r) dr. \end{aligned}$$

Természetesen a lokális egyensúlyt a neutroncsillag egészére ki kell terjesztenünk, ezért integrálnunk kell a csillag teljes tartományára:

$$\int_0^R \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} dr = \int_0^R f(r) dr.$$

A fenti egyenletben (most) csak az R az ismeretlen mennyiség, így az egyenletet megoldva egyértelmű megoldást kapunk a csillag sugarára vonatkozólag. Mielőtt a konkrét sűrűség esetére megoldanánk az egyenletet, vegyük észre, hogy a baloldal integrandusa átalakítható az n teljes deriváltjává, hiszen $\frac{dP}{dn}$ derivált független a sűrűség konkrét alakjától:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} dr &= \frac{1}{12} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \int_0^R n^{2/3} \frac{dn}{dr} dr = \frac{1}{12} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \int_0^R d(n^{5/3}) dr = \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{12} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left[n^{5/3}(r) \right]_0^R \end{aligned}$$

ezzel a neutroncsillagra vonatkozó egyensúlyi feltétel radiálisan változó sűrűség mellett a

$$\frac{3}{5} \frac{1}{12} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left[n^{5/3}(r) \right]_0^R = -G \frac{4\pi}{3} m^2 \int_0^R n^2 r dr$$

képlettel adható meg. Alkalmazzuk a kapott összefüggést a feltételezett $n(r) = n_c \left(1 - \frac{x}{R} r\right)$ sűrűségre:

$$\left[n_c^{5/3} \left(1 - \frac{x}{R} r\right)^{5/3} \right]_R^0 = n_c^{5/3} (1 - (1-x)^{5/3}),$$

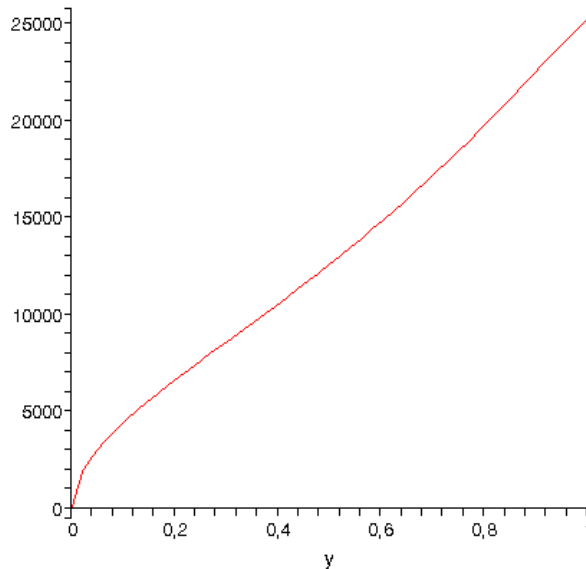
ahol kihasználtuk, hogy a jobb oldal mínusz egy szorzótagja helyett felcseréltük a baloldal integrálási határait, valamint a jobb oldal integrálja:

$$n_c^2 \int_0^R r \left(1 - \frac{x}{R} r\right)^2 dr = n_c^2 \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{3} \frac{x}{R} r^3 + \frac{1}{4} \frac{x^2}{R^2} r^4 \right]_0^R = n_c^2 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} x + \frac{1}{4} x^2 \right).$$

Az behelyettesítések után az egyensúlyi feltétel egy R -re vonatkozó egyenletre redukálódik, melyből könnyen kifejezhet a keresett sugarat:

$$R^2 \approx \frac{\hbar^2}{Gm^3} n_c^{-1/3} \frac{1 - (1-x)^{5/3}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2}.$$

A csillag sugara annak a függvényében változik, hogy a sűrűségcsökkenés meredeksége mekkora, azaz a felszínen a centrum sűrűségének hányad részére csökken a sűrűség. A $R(x)$ függvényt a 4.1 ábra mutatja.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**3. ábra:** A függőleges tengely az R sugár szerepel [m] egységekben, a vízszintes tengelyen az $x = y$ meredekséget jellemző paraméter szerepel.

A 4.1. ábrán jól látható, hogy a sűrűségcsökkenés következtében a neutroncsillag maximális sugara szigorúan monoton nő, mely a vártaknak megfelelő karakterisztika. A valóságban a neutroncsillag felszínén már olyan kicsi a nyomás, hogy komplett atommagok is kialakulhatnak. Ez nagyjából annak felel meg, hogy a neutronok átlagos sűrűsége a felszínen 1-2 nagyságrenddel kisebb, mint a centrumban, azaz azt jelenti, hogy $x \equiv y \approx 0,9 - 0,99$. A görbe alapján ez $R \sim 20-24$ km-t jelent, amely már jól közelíti a valóságos méreteket.

3.4.1.3. 2. közelítés: a neutroncsillag sűrűsége a sugár exponenciális függvénye

Érdekes megvizsgálni azt az esetet, amikor a sűrűség a sugár nem lineárisan, hanem exponenciálisan csökkenő függvénye. Ezt a választást az motiválja, hogy a csillaganyag sűrűségének változása a centrum környékén várhatóan nagyobb, mint a felszín közelében. A sűrűség általános alakja tehát

$$n(r) = A e^{-\frac{x}{R}r}.$$

A peremfeltételek az előző esethez hasonlóan:

$$n(r)|_{r=0} = n_c, \quad n(r)|_{r=R} = \frac{n_c}{x}.$$

A peremfeltételekhez való illesztés után a következő függvényt kapjuk a sűrűsége:

$$n(r) = n_c e^{-\frac{x}{R}r}.$$

A neutroncsillag egészére vonatkozó egyensúlyi feltételt a gravitációs nyomás és a Fermi-gáz nyomása között az ár levezetett

$$\frac{3}{5} \frac{1}{12} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left[n^{5/3}(r)\right]_R^0 = G \frac{4\pi}{3} m^2 \int_0^R n^2 r dr$$

összefüggés írja le. A jobb oldal sűrűsége vonatkozó tagja egyszerű behelyettesítéssel kiszámolható:

$$\left[n_c^{5/3} e^{-\frac{5x}{3R}r} \right]_R^0 = n_c^{5/3} \left(1 - e^{-\frac{5x}{3}x} \right),$$

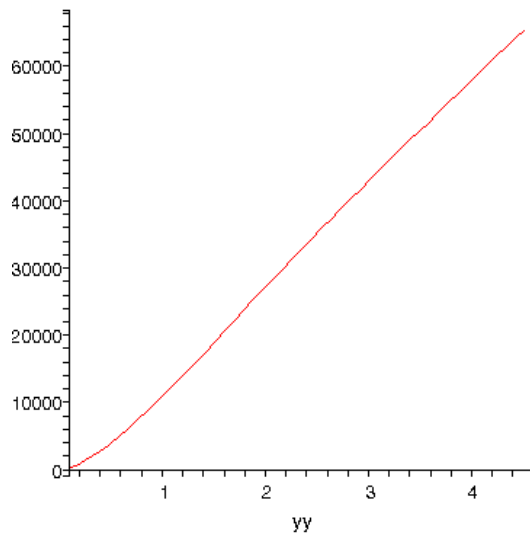
míg a baloldalon szereplő integrál parciális integrálással megoldható:

$$\begin{aligned} n_c^2 \int_0^R r e^{-\frac{2x}{R}r} dr &= n_c^2 \left\{ \left[-r e^{-\frac{2x}{R}r} \frac{R}{2x} \right]_0^R + \frac{R}{2x} \int_0^R e^{-\frac{2x}{R}r} dr \right\} = n_c^2 \left\{ \left[-r e^{-\frac{2x}{R}r} \frac{R}{2x} \right]_0^R + \frac{R}{2x} \left[-e^{-\frac{2x}{R}r} \frac{R}{2x} \right]_0^R \right\} = \\ &= n_c^2 \frac{R^2}{2x} \left(\frac{1}{2x} - \left(1 + \frac{1}{2x} \right) e^{-2x} \right). \end{aligned}$$

A fenti eredmények alapján az egyensúlyi feltételből kifejezhetjük a sugarat, mint az x meredekség függvényét:

$$R^2 \sim \frac{\hbar^2}{Gm^3} n_c^{-1/3} \frac{2x \left(1 - e^{-\frac{5}{3}x} \right)}{\left(\frac{1}{2x} - \left(1 + \frac{1}{2x} \right) e^{-2x} \right)}.$$

A 4.2.ábra mutatja a sugárra kapott függvény.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban..**4. ábra:** A függőleges tengely az R sugár szerepel [m] egységeken, a vízszintes tengelyen az $x = yy$ meredekséget jellemző paraméter szerepel.

3.4.2. A neutroncsillag szerkezete

A neutroncsillag belső szerkezete négy jól elkülöníthető héjra bontható. A külső és belső héj vastagsága csupán néhány méter. A sűrűség a csillag felületén a zérushoz tart, ezért ebben a tartományban közönséges atommagok is találhatóak. Befelé haladva a sűrűség egyre nő, ennek következtében a relativisztikus elektrongáz degenerálttá válik, és megnő az elektronbefogás valószínűsége, ezért itt neutron dús atommagok vannak. A nagy sűrűség miatt a atommagok rácsba rendeződnek. A neutroncsillag elektromosan semleges, ezért a protonok és az elektronok száma megegyezik.

A belső héjban már kezdenek felbomlani a magok, és neutronokat sugároznak ki. A folyamatot az határozza meg, hogy a rendszer teljes energiája adott barionszám mellett minimális legyen. Ezt négy feltétel együttese határozza meg:

- A β -bomlással szembeni stabilitás (Z szerinti minimalizálás).
- A legkedvezőbb tömegszámú magok kialakulása (A szerinti minimalizálás).
- A neutronok kémiai potenciálja legyen azonos a magon belül és kívül (neutronsűrűség szerinti minimalizálás).
- A külső nukleongázra és a magokra ható nyomás egyezzen meg (a mag által elfoglalt térfogat szerinti minimalizálás)

A sűrűség növekedtével a neutrongáz energiája és nyomása megnő, ezzel együtt az atommagok is egyre több neutron nyelnek el. Ez a folyamat egészen addig folytatódik, míg a nagy energiasűrűség miatt a magok teljesen instabillá válnak és nukleonokra esnek szét. Ekkor a rendszerben csak n, p , és elektron van jelen.

A neutroncsillag centrumában neutron-proton-elektron-gáz van. A gáz kémiai és elektromos egyensúlyát a gyenge kölcsönhatás szabályozza. Ahogy haladunk a centrum középpontja felé a sűrűség növekedtével egyre több proton és elektron alakul át gyenge kölcsönhatás révén neutronná és neutrínóvá. A neutrínók elhagyják a neutroncsillagot és ezzel jelentősen csökkentve a neutroncsillag energiáját.

Ha a nagytömegű csillag körül a társcsillaga közeli pályán keringett, akkor a neutroncsillagra anyag áramolhat át (akkréció). Az átáramló anyag korong alakú felhőt képez a neutroncsillag körül. Miközben az anyag a neutroncsillag felületére hull, annak

gravitációs potenciális energiája röntgensugárzás formájában szabadul fel. Az ilyen rendszereket röntgenkettősöknek nevezzük. Az anyagátadás során a neutroncsillag forgása gyorsulhat.

